

Quaderni di finanza

Probabilità reali e probabilità
neutrali al rischio nella stima del
valore futuro degli strumenti derivati

L. Giordano, G. Siciliano



CONSOB
COMMISSIONE NAZIONALE
PER LE SOCIETÀ E LA BORSA

74

agosto 2013

Quaderni di finanza

Probabilità reali e probabilità
neutrali al rischio nella stima del
valore futuro degli strumenti derivati

L. Giordano, G. Siciliano

74

agosto 2013



CONSOB

COMMISSIONE NAZIONALE
PER LE SOCIETÀ E LA BORSA

L'attività di ricerca e analisi della Consob intende promuovere la riflessione e stimolare il dibattito su temi relativi all'economia e alla regolamentazione del sistema finanziario.

I **Quaderni di finanza** accolgono lavori di ricerca volti a contribuire al dibattito accademico su questioni di economia e finanza. Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non rappresentano posizioni ufficiali della Consob, né impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i lavori della collana, non è pertanto corretto attribuire le argomentazioni ivi espresse alla Consob o ai suoi Vertici.

I **Discussion papers** ospitano analisi di carattere generale sulle dinamiche del sistema finanziario rilevanti per l'attività istituzionale.

I **Quaderni giuridici** accolgono lavori di ricerca volti a contribuire al dibattito accademico su questioni di diritto. Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non rappresentano posizioni ufficiali della Consob, né impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i lavori della collana, non è pertanto corretto attribuire le argomentazioni ivi espresse alla Consob o ai suoi Vertici.

I **Position papers** sono documenti di consultazione su ipotesi di modifiche del quadro regolamentare o degli approcci di vigilanza.

Comitato di Redazione

Giovanni Siciliano (coordinatore), Francesco Adria, Simone Alvaro, Valeria Caivano, Monica Gentile, Nadia Linciano, Valerio Novembre, Paola Possenti, Isadora Tarola

Segreteria di Redazione

Eugenia Della Libera

Progetto Grafico

Studio Ruggieri Poggi

Stampa e allestimento

Tipografia Revelox s.n.c. (Roma)

www.revelox.it

Consob

00198 Roma – Via G.B. Martini, 3

t 06.8477.1

f 06.8477612

e studi_analisi@consob.it

ISSN 2281-1915 (online)

ISSN 1121-3795 (stampa)

Probabilità reali e probabilità neutrali al rischio nella stima del valore futuro degli strumenti derivati

L. Giordano*, G. Siciliano*

Abstract

Partendo da alcune ipotesi teoriche circa il funzionamento dei mercati finanziari (mercati completi e principio di non arbitraggio) e circa la dinamica dei prezzi delle attività finanziarie, i modelli *standard* sviluppati nell'ambito della matematica finanziaria permettono di calcolare il *fair price* di un contratto derivato al momento della sua stipula come valore atteso attualizzato dei possibili *pay-off* futuri. Se, da un lato, il *fair price* ottenuto mediante tale metodologia costituisce un'informazione affidabile e coerente circa il "prezzo equo" del prodotto finanziario al momento della stipula del contratto, dall'altro, come ben noto in letteratura, le distribuzioni di probabilità impiegate nel procedimento di stima dei possibili *pay-off* futuri del derivato non rappresentano le "reali" probabilità di accadimento di eventi futuri e pertanto forniscono informazioni potenzialmente fuorvianti circa la probabilità che "ad una data futura" il valore di uno strumento finanziario derivato sia superiore o inferiore a determinate soglie. Ciò deriva dal fatto che tali distribuzioni di probabilità sono *risk-neutral*, ovvero sono ottenute assumendo l'ipotesi di neutralità al rischio degli investitori; tale ipotesi è accettabile solo per finalità di *pricing* del derivato alla data di stipula del contratto (assumendo che il derivato sia replicabile con le attività sottostanti e che valga quindi la cosiddetta ipotesi di *non-arbitraggio*). Il presente lavoro chiarisce pertanto che l'utilizzo separato delle informazioni contenute nelle partizioni di probabilità del valore futuro di un derivato finanziario – probabilità che sono alla base del processo di *pricing* – dovrebbe avvenire previa opportuna correzione per tener conto dell'avversione al rischio degli investitori, ovvero usando distribuzioni di probabilità "reali" (cosiddette *real world probabilities*). Ciò, tuttavia, renderebbe tali partizioni di probabilità non univoche e imporrebbe un affinamento della metodologia volta a consentirne l'impiego nella regolamentazione sulla trasparenza dei prodotti finanziari; questo, parimenti, non esclude che per finalità interne di *risk management* gli intermediari finanziari possano utilmente apportare le correzioni per il premio al rischio che ritengano necessarie.

JEL Classification: C02, C51, C58, G12, G17, G33

Parole chiave: *pricing*, *fair-value*, misura neutrale al rischio, partizioni di probabilità, martingala.

* Consob, Divisione Studi. Le opinioni espresse nel presente Quaderno sono attribuibili esclusivamente agli autori e non rappresentano posizioni ufficiali della Consob, né impegnano in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i contenuti del presente Quaderno, non è pertanto corretto attribuirli alla Consob o ai suoi Vertici. Si ringraziano Andrea Beltratti, Giuseppe Corvino e Roberto Renò per le preziose osservazioni. Errori e imprecisioni sono imputabili esclusivamente agli autori.

Indice

1	Introduzione	5
2	Il <i>pricing</i> dei derivati su azioni e le probabilità <i>risk-neutral</i>	7
2.1	L'approccio <i>risk-neutral</i> nel <i>pricing</i> dei prodotti derivati	9
2.2	Limiti informativi delle probabilità <i>risk-neutral</i>	27
3	L'approccio <i>risk-neutral</i> per il <i>pricing</i> di strumenti derivati collegati ai tassi d'interesse (IRS)	36
3.1	Aspetti generali della valutazione dei contratti IRS	36
3.2	Il modello CIR	44
4	Conclusioni	49
	Bibliografia	51
	Appendice	55

1 Introduzione

Uno strumento sovente proposto per valutare la potenziale convenienza di un prodotto finanziario derivato è rappresentato dalla stima della probabilità che il suo valore ad una certa data futura superi un determinato livello (ad esempio, il prezzo al momento della stipula). Nel gergo del dibattito sul tema che si è sviluppato in Italia, questo approccio viene definito come "scenario probabilistico".

In questo lavoro verrà mostrato come non esiste un modo univoco e non soggettivo per calcolare gli scenari probabilistici in maniera uniforme per la generalità degli investitori. Il motivo di fondo è legato al fatto che non è corretto calcolare gli scenari usando le probabilità cosiddette *risk neutral* (ovvero "pseudo-probabilità")¹, che vengono invece usate correttamente per calcolare il *fair price* di uno strumento finanziario "alla data corrente" o di stipula del contratto. In altri termini, il *fair value* del prodotto alla data di stipula è ottenuto calcolando il valore atteso scontato della distribuzione di probabilità a scadenza ("a una certa data futura") del prezzo dello strumento finanziario derivato oggetto di valutazione. Per ottenere tutti i possibili prezzi a scadenza² del prodotto finanziario derivato che si intende valutare e le rispettive probabilità ad essi associate occorre simulare le possibili traiettorie del prezzo dell'attività finanziaria sottostante (da cui si ricava il *payoff* del prodotto derivato). La simulazione numerica delle traiettorie di prezzo delle attività finanziarie sottostanti richiede che si facciano alcune ipotesi circa la legge che governa il movimento dei prezzi delle attività finanziarie (ad esempio, il moto geometrico browniano nel caso di azioni) e soprattutto la fondamentale assunzione di un mondo *risk-neutral* (ove vige la legge del prezzo unico del portafoglio replicante), ipotesi accettabile, come sarà diffusamente spiegato nel lavoro, se lo strumento derivato può essere replicato con le attività sottostanti (cosiddetta ipotesi di "non-arbitraggio"). Tali ipotesi sono alla base della moderna teoria del *pricing* dei prodotti finanziari.

Nel lavoro verranno illustrate in dettaglio le singole fasi di tale processo, ma quello che rileva evidenziare sin da ora è che le "pseudo-probabilità" non sono interpretabili come probabilità associate ad una "previsione" dei prezzi futuri, ma derivano esclusivamente dall'estrapolazione dei possibili valori del prodotto finanziario ad una certa data futura che risultano compatibili (date le ipotesi teoriche sopra esplicitate) con i dati correnti di mercato (in particolare, come sarà illustrato meglio nel lavoro, con la volatilità implicita del prezzo dell'attività finanziaria sottostante osservata al momento del *pricing* del derivato, che è l'unica informazione che viene utilizzata in tutto il processo di stima). In altri termini le informazioni contenute negli scenari probabilistici sono delle mere proiezioni *ex-ante* dei prezzi futuri di un prodotto finanziario, coerenti con le condizioni correnti di mercato e con le caratteristiche di strutturazione del prodotto.

- 1 Opportunamente identificate in letteratura come "pseudo-probabilità", proprio per non confonderle con le probabilità reali o probabilità *tout court* che si riferiscono, come è naturale, alla probabilità di accadimento di eventi futuri.
- 2 A scadenza o ad "una certa data futura", questo dipende dall'*holding period* che si prende in considerazione al momento del *pricing* del derivato.

Per la costruzione di "scenari di probabilità" in grado di fornire informazioni affidabili – ovvero informazioni che "realmente" si riferiscono alla previsione di un prezzo futuro – si devono usare "probabilità reali" (*real world probabilities*), ma a tal fine è necessario fare assunzioni sul premio a rischio richiesto dagli investitori per detenere attività rischiose. Il premio a rischio varia da soggetto a soggetto e ogni ipotesi su un determinato livello del premio a rischio valido per tutti gli investitori è inevitabilmente arbitraria e discutibile; per ciò che riguarda, ad esempio, i derivati su azioni, esiste un'ampia letteratura che documenta la forte variabilità nel tempo (ma anche fra paesi) del premio al rischio misurato *ex post* (cioè come differenza fra i rendimenti delle azioni e il tasso *risk-free*).

Gli scenari probabilistici calcolati sulla base delle "probabilità reali" finiscono quindi per essere inevitabilmente arbitrari e dipendenti dalle ipotesi sull'avversione al rischio degli investitori. In sostanza, per usare una semplice analogia, l'uso delle probabilità *risk-neutral* per calcolare gli scenari probabilistici equivale a voler misurare una certa distanza in metri utilizzando però un'unità di misura che non è il metro. Ciò ovviamente non mette in discussione la fondatezza scientifica dell'approccio *risk-neutral* per le finalità di *pricing* dei derivati né il potenziale valore informativo degli scenari probabilistici, soprattutto per finalità di *risk management*; il problema di fondo è legato alle difficoltà interpretative e alla corretta rappresentazione delle ipotesi alla base del calcolo degli scenari in modo tale che il fruitore di tale informazione sia messo in condizione di comprenderne a fondo il giusto perimetro semantico e assumere di conseguenza scelte di investimento consapevoli.

Le argomentazioni appena illustrate valgono in particolare per i derivati che hanno come sottostante azioni, e ciò sarà illustrato in dettaglio nel paragrafo §2, ma argomentazioni sostanzialmente analoghe valgono anche per i derivati che hanno come sottostante tassi d'interesse, se pure, come sarà discusso in dettaglio nel paragrafo §3, vi siano alcune importanti differenze sia tecniche sia di interpretazione economica dei risultati. In particolare, anche il *pricing* di derivati su tassi d'interesse può avvenire in ambiente *risk-neutral* ma in questo caso l'ipotesi di premio al rischio pari a zero per prevedere il valore futuro del derivato equivale ad assumere una precisa teoria che spiega l'evoluzione futura dei tassi, ossia la teoria delle aspettative "pure" o "non distorte" per cui si assume che il valore atteso dei tassi a pronti futuri sia pari al valore corrente dei tassi a termine. In sostanza, nel mondo dei tassi d'interesse l'ipotesi di premio al rischio pari a zero ha, in linea di principio, minori elementi di arbitrarietà rispetto al mondo dei derivati azionari perché "puntellata" da una specifica ipotesi economica sul comportamento e sulle aspettative degli operatori. Ciò non toglie, tuttavia, che vi sono anche altre teorie economiche sulla dinamica dei tassi in grado di spiegarne l'evoluzione futura rispetto a quella delle "aspettative pure", quali, in particolare, quella del premio per la liquidità, dei mercati segmentati e dell'"habitat preferito", teorie che invece postulano un premio al rischio diverso da zero³. Inoltre, la teoria delle aspettative potrebbe essere maggiormente accettabile in condizioni di andamento normale dei mercati e non invece in caso di forti turbolenze e elevata vo-

3 Cfr. Castellani, De Felice, Moriconi, Mottura (1993), *Un corso sul controllo del rischio di tasso d'interesse*, Il Mulino, pagg. 108-115.

latilità. Peraltro, alcuni studi empirici "classici" sul mercato americano, in particolare Fama e Bliss (1987), Campbell e Shiller (1991) e Cochrane e Piazzesi (2005), hanno ampiamente rigettato l'ipotesi delle aspettative pure o non distorte. Questi studi mostrano che i tassi *forward* non sono predittori accurati dei tassi futuri (ovvero che i tassi a lungo termine attuali non sono una media dei futuri tassi attesi a breve) e che quindi esiste un premio al rischio diverso da zero nella curva dei tassi.

La conclusione generale è quindi analoga a quella valida nel caso di derivati su azioni e cioè che ogni ipotesi sul premio al rischio, necessaria per stimare il valore futuro dei derivati, è comunque arbitraria se riferita alla generalità degli investitori e ciò imporrebbe un affinamento della metodologia degli scenari probabilistici volta a consentirne l'impiego nella regolamentazione sulla trasparenza dei prodotti finanziari.

Questi problemi sono ben noti nel dibattito scientifico internazionale e nel presente lavoro si cercherà di riassumerli in maniera chiara e rigorosa con riferimento ai derivati su azioni (par. §2) e a quelli su tassi di interesse (par. §3), anche a beneficio di coloro che non hanno familiarità con la letteratura accademica sulla modellistica in questione. Il paragrafo finale sintetizza le questioni aperte in materia di "scenari probabilistici" illustrate nel lavoro. In Appendice si dà conto anche del quadro normativo europeo del settore.

2 Il *pricing* dei derivati su azioni e le probabilità *risk-neutral*

Per comprendere le argomentazioni tecniche alla base di quanto affermato nel paragrafo introduttivo è necessario ripercorrere brevemente i passaggi e le ipotesi sottostanti i modelli matematici utilizzati in letteratura per calcolare il prezzo dei prodotti derivati.

In particolare, è necessario illustrare le ipotesi alla base del concetto di *risk-neutral pricing*, perché questo è il passaggio centrale per capire le fondamenta e i limiti metodologici degli scenari probabilistici. Ciò sarà oggetto del successivo par. 2.1, che contiene un'illustrazione sintetica e il più possibile accessibile anche a chi non ha familiarità con la modellistica matematica, se pur corredata dei dettagli tecnici necessari per chi volesse meglio approfondire il tema; sebbene si tratti di un'illustrazione *standard* del tema, verranno messe a fuoco con la massima chiarezza le ipotesi e le interpretazioni economiche alla base della modellistica matematica, al fine di mettere chiaramente in luce le ragioni delle critiche delineate nel paragrafo introduttivo. Questi limiti degli scenari probabilistici verranno poi chiaramente argomentati sul piano tecnico nel paragrafo 2.2.

Prima di procedere nel percorso appena enunciato si ritiene utile fornire una prima panoramica, anche al livello meramente intuitivo, di quale sia la logica e la meccanica attraverso la quale si ricava il set di informazioni chiamato comunemente "scenario di probabilità" e cosa "realmente" significhino tali probabilità; si tratta cioè di fare uno sforzo di chiarificazione semantica, in assenza del quale risulta distorto e

poco informato qualunque dibattito circa la loro efficacia quale presidio a tutela di scelta consapevoli degli investitori.

Come detto, il *pricing* dei prodotti finanziari derivati si basa sul fondamentale «principio di non arbitraggio», che consente – attraverso diversi gradi di sofisticazione, che tuttavia non aggiungono nulla alla comprensione della logica del processo – di calcolare il prezzo *fair* di un prodotto finanziario derivato (o prezzo teorico) alla “data corrente” (cioè al momento della stipula del contratto) come valore atteso scontato della distribuzione dei prezzi dello stesso derivato ad una data futura (che può essere anche antecedente alla data di scadenza del derivato)⁴.

Alla luce di quanto detto, risulta dunque evidente che per poter procedere al *pricing* di uno strumento finanziario derivato occorre stimare la distribuzione futura (qualunque sia la data futura scelta) dei possibili prezzi dello strumento finanziario in questione. Il valore futuro di un derivato dipende dal suo *pay-off* futuro il quale, a sua volta, è una funzione del prezzo dell'attività finanziaria sottostante. Occorre pertanto assumere una legge di movimento che governa la variazione del prezzo dell'attività finanziaria sottostante dalla data corrente a una data futura prescelta.

I progressi della finanza matematica hanno reso possibile simulare le traiettorie di prezzo delle attività finanziarie sottostanti il derivato (azioni, tassi di interesse, *commodities*, etc.) facendo alcune ipotesi circa la legge di movimento dei suddetti prezzi e assumendo l'assenza di arbitraggio in mercati completi, ovvero la possibilità di replicare il derivato attraverso le attività sottostanti, adoperando quello che tecnicamente si chiama passaggio dalle probabilità “reali” alle probabilità neutrali al rischio o “pseudo-probabilità”. La simulazione numerica (in genere con il metodo Monte Carlo) consente pertanto di ottenere un numero elevato di traiettorie di prezzo, ovvero N prezzi simulati alla data futura prescelta⁵. Per simulare le traiettorie di prezzo l'unica incognita dell'equazione stocastica differenziale (ovvero dell'equazione che descrive il movimento dei prezzi) è la volatilità dell'attività finanziaria sottostante, essendo tutti gli altri parametri dell'equazione osservabili o costanti. Per ricavare il valore della volatilità dell'attività finanziaria sottostante si procede normalmente con il calcolo della volatilità implicita dell'attività finanziaria sottostante (o della volatilità storica, se non disponibile quella implicita), partendo dall'osservazione del prezzo di mercato di opzioni *standard* trattate su mercati regolamentati (o su mercati abbastanza liquidi) “alla data corrente”. In definitiva, l'unica informazione che alimenta tutto il processo è il prezzo dell'attività finanziaria sottostante e la sua volatilità implicita al tempo corrente⁶.

4 È bene chiarire univocamente cosa si intende per *fair price* (o *fair value*) del prodotto finanziario derivato. Con il termine *fair price* si intende il valore teorico di uno strumento derivato ottenuto attraverso la procedura del “*pricing* subordinato”, ovvero l'applicazione del principio di non arbitraggio tra il derivato da prezzare e il suo portafoglio di replica. Tale prezzo teorico è ottenuto in un ambiente che soddisfa le stringenti ipotesi teoriche di un “mercato ideale”, ovvero: (i) competitività (operatori *price-taker*, massimizzatori e che dispongono delle stesse informazioni); (ii) non-frizionalità (assenza di costi di transazione, operazioni infinitamente divisibili, mercati continui, possibilità di vendite allo scoperto e assenza di rischio di insolvenza); (iii) assenza di arbitraggio.

5 Generalmente almeno 10.000 simulazioni.

6 Oltre al tasso *risk-free* che si assume però uguale per tutte le attività finanziarie (come verrà meglio illustrato nel par. 2.1).

A questo punto del processo di *pricing* si dispone pertanto di tutte le N possibili realizzazioni del prezzo dell'attività finanziaria alla data futura prescelta. Tali prezzi si distribuiranno lungo un intervallo più o meno ampio e alcuni di essi si presenteranno con maggior o minor frequenza rispetto ad altri; ordinando i prezzi lungo un asse e calcolando la frequenza di accadimento si otterrà in sostanza una distribuzione di probabilità dei prezzi a tale data futura; data la relazione funzionale deterministica tra prezzo del sottostante e *pay-off* del derivato, si può costruire agevolmente la distribuzione di probabilità del prezzo del derivato a partire da quella dell'attività sottostante. Il valore scontato atteso del valore del derivato alla data futura così ottenuto è quello che viene chiamato *fair price* del prodotto finanziario derivato. Il valore atteso si ottiene facendo una media ponderata di tutte le possibili realizzazioni di prezzo, usando come pesi le rispettive probabilità (come sarà spiegato oltre si tratta però di "*pseudo-probabilità*" ottenute in un contesto *risk-neutral*); i risultati vengono poi scontati dalla data futura prescelta al tempo corrente.

Quello che verrà illustrato in dettaglio nel presente lavoro è che:

- a) il processo descritto, e l'utilizzo delle probabilità *risk-neutral* su cui si fonda, risulta metodologicamente corretto solo ai fini di *pricing*, ovvero solo per il calcolo del *fair price* di prodotti finanziari derivati "alla data corrente";
- b) la distribuzione di probabilità che viene utilizzata per il calcolo del valore atteso (ovvero per il *pricing* del punto precedente) non rappresenta né la probabilità di accadimento di eventi futuri né una previsione circa i possibili prezzi futuri dello strumento finanziario derivato. I prezzi alla data futura simulati e le relative probabilità costituiscono esclusivamente l'estrapolazione dei possibili risultati a scadenza coerenti con l'ipotesi di neutralità al rischio e con i dati di mercato correnti, cioè essenzialmente con la volatilità implicita dell'attività sottostante.

In definitiva, tali probabilità *risk-neutral* si riferiscono a tutte le possibili realizzazioni future del prezzo del sottostante che sono state generate partendo dalla volatilità implicita e dal prezzo corrente di mercato dell'attività sottostante il derivato. L'aggregazione di tali probabilità in diverse partizioni e il calcolo dei cosiddetti scenari di probabilità, nella misura in cui non si tenga conto del premio per il rischio, genera informazioni che non rappresentano previsioni di prezzi futuri e pertanto non devono essere interpretate dall'investitore come probabilità "reali" che il prezzo del derivato ad una data futura sia superiore o inferiore a determinate soglie. Tale errore interpretativo è invece molto probabile per un investitore che non disponga delle conoscenze di calcolo stocastico per interpretare correttamente il contenuto informativo di una distribuzione di probabilità *risk-neutral*.

2.1 L'approccio *risk-neutral* nel *pricing* dei prodotti derivati

Esiste un'ampia letteratura nell'ambito del filone della matematica finanziaria che, sulla base di modelli stocastici sulla dinamica dei tassi di interesse e dei prezzi azionari, consente di calcolare il prezzo teorico (*fair price*) di strumenti finanziari

derivati o di prodotti strutturati (ad esempio, obbligazioni il cui rendimento è collegato all'andamento di indici azionari, tassi di cambio o altri "sottostanti").

Semplificando al massimo, tali modelli consentono di simulare la dinamica futura dei possibili flussi di cassa (*pay-off*) di uno strumento derivato o di un prodotto strutturato e di determinare la distribuzione di probabilità del suo valore ad una certa data futura T . I possibili valori in T vengono poi attualizzati e da qui si ottiene una distribuzione di probabilità del prezzo "alla data corrente" t ; la media ponderata (valore atteso) di tale distribuzione di probabilità rappresenta il *fair value* o il prezzo teorico del derivato "ad oggi". Gli "scenari probabilistici" sfruttano l'intera distribuzione di probabilità del valore in T per inferire da ciò la probabilità che il valore dello strumento finanziario ad una certa data futura sia superiore/inferiore a determinate soglie. In questo senso, gli scenari utilizzano un "sottoprodotto", o una fase intermedia, del processo di *pricing*.

Il problema centrale, come si vedrà meglio di seguito, è quello di capire le ipotesi alla base dei modelli stocastici utilizzati per simulare l'andamento futuro dei *pay-off* del prodotto derivato, che dipende a sua volta dall'andamento futuro del prezzo dell'attività finanziaria sottostante.

Nel caso di un derivato o di un prodotto strutturato legato all'andamento di strumenti azionari, quali ad esempio opzioni *call* o *put*, uno dei possibili modelli utilizzabili per simulare l'andamento futuro del prezzo di un'azione è il cosiddetto "moto geometrico browniano", cioè un'equazione differenziale che descrive in un istante di tempo infinitesimale la variazione del prezzo S di un'azione:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

laddove dS_t è la variazione del prezzo dell'azione in un istante infinitesimale di tempo, μ è il cosiddetto *drift* del processo (la cui interpretazione economica, come si dirà meglio fra breve, equivale al tasso di rendimento richiesto per investire in azioni) e σ è invece la volatilità attesa del prezzo dell'azione (detto anche parametro di "*diffusione*" del processo); W_t è infine una variabile aleatoria, ossia un cosiddetto "processo di Markov", tale che la variazione ΔW in un intervallo di tempo Δt è pari a $\varepsilon * \sqrt{\Delta t}$ dove ε è una variabile causale normale standardizzata (cioè media nulla e varianza unitaria) e tale che i valori di ΔW in due qualsiasi intervalli Δt sono indipendenti.

In sostanza, l'equazione (1) postula che il rendimento di un'azione – cioè dS_t/S_t – nell'intervallo temporale Δt ha una distribuzione normale con media $\mu\Delta t$ e deviazione standard $\sigma\Delta t$ e che il rendimento dell'azione nell'intervallo Δt è indipendente dai rendimenti negli istanti temporali precedenti, assumendo con ciò l'ipotesi di efficienza informativa dei mercati.

L'equazione (1) modella quindi l'incremento percentuale del prezzo di un'azione (ossia il suo rendimento) in un istante infinitesimale di tempo, cioè dS_t/S_t , come somma di una componente deterministica proporzionale al valore del parametro μ e di una componente aleatoria σdW_t che genera incrementi/decrementi casuali

ma indipendenti nel tempo e identicamente distribuiti sulla base di una distribuzione normale.

Il punto cruciale per utilizzare in termini pratici l'equazione (1) è la stima di μ . Infatti, mentre la volatilità σ è normalmente stimata sulla base della volatilità implicita quotata sul mercato delle opzioni sull'azione sottostante alla data in cui si effettua il *pricing*, μ rappresenta invece in termini economici il rendimento che i partecipanti al mercato richiedono per investire in azioni, che in equilibrio deve coincidere con il rendimento atteso dell'investimento in azioni. Il rendimento richiesto, a sua volta, dovrà essere pari al tasso di interesse privo di rischio r più un premio al rischio. Poiché il premio al rischio può variare da investitore a investitore, in funzione del suo grado di avversione al rischio, l'equazione (1) non è operativamente utilizzabile poiché darebbe luogo a prezzi del derivato diversi a seconda dell'investitore che effettua il *pricing*.

Tuttavia, per i motivi che saranno meglio illustrato di seguito, è possibile mostrare che, sotto certe condizioni di mercati completi ed efficienti e di assenza di arbitraggio, in luogo dell'equazione (1) è possibile simulare i prezzi futuri delle azioni utilizzando la seguente equazione:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

dove il premio al rischio richiesto per investire in azioni μ è sostituito dal tasso *risk-free* r . È evidente la grande importanza di questo risultato perché consente di calcolare un prezzo che è indipendente dall'avversione al rischio degli investitori e che quindi è unico per tutti gli operatori.

L'intuizione economica originaria alla base di questo risultato si deve ai lavori degli inizi degli anni settanta del secolo scorso degli economisti Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black, che poi valsero loro il premio Nobel nel 1997.

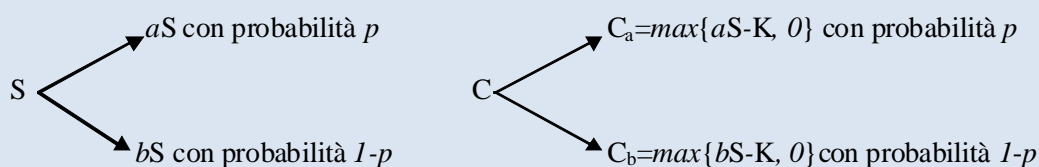
L'intuizione economica è in realtà molto semplice ed è sintetizzabile come segue: se il *pay-off* di un derivato è replicabile con un portafoglio composto dall'attività sottostante e da un titolo privo di rischio (detto "*portafoglio di replica*"), allora il prezzo del derivato e quello del portafoglio di replica dovranno essere uguali; in caso contrario, sarebbero possibili operazioni di arbitraggio che riallineerebbero il prezzo del derivato al valore del suo portafoglio di replica. Dal principio di non arbitraggio consegue direttamente la circostanza che il prezzo del derivato dovrà essere legato a quello del sottostante da una funzione che non dipende dall'avversione al rischio degli agenti economici.

Il Box 1 illustra un esempio di applicazione di questa idea, riprendendo elementi che si ritrovano nei più diffusi manuali avanzati di matematica finanziaria, che è un utile punto di partenza per capire come è possibile effettuare il *pricing* di un derivato senza fare ipotesi sul premio a rischio richiesto dagli investitori e come introduzione preliminare ai concetti di *risk-neutral pricing* e probabilità *risk-neutral*.

Box 1 – Risk-neutral pricing e probabilità risk-neutral in un caso semplificato di valutazione di un derivato su un titolo azionario con 2 possibili “stati del mondo” e un solo periodo (modello binomiale uniperiodale)

*****Modello di pricing binomiale (CRR)*****

Si consideri al tempo t un'opzione *call* su un'azione che scade in $t+1$. Il valore in $t+1$ dell'opzione (C) dipende dal prezzo dell'azione (S) in $t+1$, che ha una struttura binomiale. Nel modello binomiale, si assume che le contrattazioni avvengano su istanti discreti $t, t+1, t+2, \dots$ e che il prezzo S dell'azione sottostante segua un *processo stocastico binomiale moltiplicativo*. Alla fine di ciascun periodo, cioè, il prezzo del sottostante è dato dal valore di inizio periodo moltiplicato per un fattore a oppure per un fattore b , con a e b reali positivi, noti e costanti in tutti i periodi. Per semplicità, le realizzazioni al tempo $t+1$ sono riassunte nel seguente schema:



Quindi il montante unitario dell'investimento azionario nel generico periodo $[t+j, t+j+1]$ assume il valore a con probabilità p e il valore b con probabilità $1-p$.

Si assuma che sia $a > b$, cosicché un valore del sottostante a scadenza pari a aS indica un movimento al rialzo, un valore uguale a bS denota un movimento al ribasso. Si supponga che l'azione non paghi dividendi e si assumano valide le ipotesi tipiche dei mercati perfetti:

- sono consentite vendite allo scoperto e il mercato non è frizionale;
- gli agenti agiscono come *price taker* e sono massimizzatori di profitto;
- sono esclusi arbitraggi privi di rischio.

Si supponga inoltre che i tassi di interesse *risk-free* futuri:

$$i(t+j, t+j+1), j=0,1,\dots,$$

siano noti in t . Senza grave perdita di generalità si può assumere un tasso i costante su tutti i periodi, cioè:

$$i(t+j, t+j+1)=i.$$

Si supponrà quindi che:

- il tasso di interesse periodale è perfettamente prevedibile e costante al livello i .

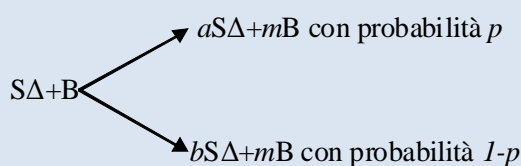
Quindi, $m=1+i$ è il montante unitario non-rischioso nel generico periodo $[t+j, t+j+1]$.

Per evitare profitti da arbitraggi privi di rischio deve essere:

$$a > m > b.$$

Infatti, se per esempio fosse $a > b > m$, sarebbe possibile realizzare un arbitraggio non-rischioso prendendo a prestito in t al tasso i una somma x e investirla nel titolo azionario. Anche se il mercato andasse in ribasso, in $t+1$ si otterrebbe l'importo bx dall'investimento, mentre si dovrebbe restituire l'importo mx , con un profitto certo $(b-m)x$. Se fosse $m > a > b$ si potrebbe ugualmente realizzare un arbitraggio vendendo allo scoperto il titolo azionario e investendo il ricavato al tasso i .

Si supponga di costruire un portafoglio composto da Δ azioni e da un investimento di B euro al tasso *risk-free* i ; denotando con $m=1+i$, il montante unitario dell'investimento non-rischioso, il montante dell'investimento di B euro al tempo $t+1$ sarà pari a mB . L'evoluzione del valore di questo portafoglio di azioni e titoli *risk-free* si può pertanto schematizzare come:



J.C. Cox, S.A. Ross e M. Rubinstein (1979) mostrano che si può calibrare il peso Δ della componente azionaria e il peso B di quella obbligazionaria di tale portafoglio in modo da replicare esattamente il *pay-off* aleatorio garantito dalla *call*, in modo cioè da assumere il valore C_u se il mercato muove al rialzo e il valore C_d se il mercato va in ribasso, ossia:

$$\begin{cases} aS\Delta + mB = C_u \\ bS\Delta + mB = C_d \end{cases} \quad [\text{A.1}]$$

Le soluzioni del sistema di due equazioni lineari in due incognite sono:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(a-b)S} \quad [\text{A.2}]$$

e

$$B = \frac{aC_d - bC_u}{(a-b)m}. \quad [\text{A.3}]$$

Per evitare arbitraggi, il prezzo in t della *call* dovrà essere quindi uguale al prezzo in t del portafoglio di replica. Si ottiene quindi:

$$C = S\Delta + B. \quad [\text{A.4}]$$

Tale equazione costituisce una formula operativa per il *pricing* dell'opzione, dato che i valori di Δ e B sono calcolabili direttamente una volta specificati i parametri del modello di valutazione. La formula di *pricing* è costruita su parametri osservabili e indipendenti dalle attese soggettive di chi valuta; in effetti nel modello non appare la misura di probabilità p e dunque è possibile affermare che nonostante i partecipanti al mercato possano avere opinioni diverse sulle probabilità degli eventi futuri, sono in ogni caso d'accordo circa il valore di mercato dell'opzione. In aggiunta, nella formula di *pricing* non è presente nessun parametro che identifica la propensione al rischio degli investitori e dunque il prezzo di mercato è compatibile con diverse posizioni soggettive rispetto al rischio.

Il modello di *pricing* formula ipotesi specifiche esclusivamente sulle caratteristiche del processo di prezzo⁷, ovvero solo sulla determinazione di aS e bS . Volendo, si può peraltro determinare una misura di probabilità che, innestata sul processo, porti a determinare un valore atteso scontato pari al prezzo di equilibrio. Tale misura è indifferente rispetto alle attese dei singoli.

Sostituendo infatti le espressioni esplicite di Δ e B si può esprimere il prezzo C in una forma più diretta e altrettanto espressiva. Si ha:

$$C = \frac{C_a - C_b}{a - b} + \frac{aC_b - bC_a}{(a - b)m} = \frac{1}{m} \left(\frac{m - b}{a - b} C_a + \frac{a - m}{a - b} C_b \right); \quad [\text{A.5}]$$

e se si definisce:

$$q = \frac{m - b}{a - b}, \quad [\text{A.6}]$$

la (A.4) si può scrivere nella forma:

$$C = \frac{1}{m} [qC_a + (1 - q)C_b]. \quad [\text{A.7}]$$

Ora il prezzo dell'opzione è interpretabile come il valore scontato atteso che l'opzione può assumere nei 2 stati futuri del mondo ("rialzo" e "ribasso") ponderati con una nuova misura di probabilità, q e $1 - q$. Tali probabilità sono dette "neutrali al rischio" o *risk-neutral* perché non dipendono dalla misura di probabilità soggettiva p circa il verificarsi dei 2 possibili stati futuri, né quindi dalla propensione al rischio dei singoli individui.

Generalizzando, si può affermare che sotto la misura di probabilità neutrale al rischio (q e $1 - q$) il valore di uno strumento derivato può essere espresso non solo come prezzo di non arbitraggio, ma anche come valore atteso dei *payoff* a scadenza⁸. La formula di *pricing* che si ottiene in forma probabilistica è equivalente alla formulazione ottenuta come prezzo di non arbitraggio; infatti si può dimostrare che:

$$C = S\Delta + B = \frac{1}{m} [qC_a + (1 - q)C_b]$$

che equivale alla cosiddetta misura a martingala equivalente, così come viene definita in Harrison e Kreps (1979), che trasformando p in q ridistribuisce la massa di probabilità facendo in modo che il prezzo di non arbitraggio di un'attività finanziaria sia pari al suo valore futuro atteso, scontato al tasso privo di rischio⁹.

Esempio numerico di *pricing* in un modello binomiale

Ipotizziamo che il prezzo di un titolo azionario in $t=0$ sia pari a \$10 ($S_0=10$) e che tra un periodo ($t=1$) possa assumere un valore S_u pari a 14 ($a=1,4$) oppure un valore S_d pari a 6 ($b=0,6$); il tasso i è pari al 10%. Supponiamo di voler scrivere un'opzione *call* con *strike price* pari a $K=\$10$ e scadenza tra un periodo; il prezzo di non arbitraggio del derivato si determina in questo modo:

7 Nel caso dell'esempio si tratta di un processo stocastico binomiale moltiplicativo.

8 (q) e ($1 - q$) vengono anche chiamate *pseudo-probabilità*, per differenziarle dalle probabilità reali p e $1 - p$.

9 La dimostrazione che la formula del valore atteso è una martingala equivalente al prezzo di non arbitraggio è contenuta in Baxter e Rennie (1996).

- a) determiniamo preliminarmente il valore in $t=1$ della *call* nei due casi di rialzo e ribasso del prezzo del sottostante:

$$C_a = \max(0, S_a - K) = \max(0, 14 - 10) = 4$$

$$C_b = \max(0, S_b - K) = \max(0, 6 - 10) = 0$$

- b) utilizziamo le equazioni [A.2] [A.3] [A.4] che abbiamo ottenuto dalla soluzione di *non arbitraggio* del modello teorico:

$$\Delta = \frac{C_a - C_b}{(a-b)S} = \frac{4-0}{14-6} = 0,50 \quad [\text{A.8}]$$

$$B = \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)m} = \frac{1,4 \cdot 0 - 0,6 \cdot 4}{(1,4 - 0,6)1,1} = -2,72 \quad [\text{A.9}]$$

$$C_0 = S_0 \Delta + B_0 = 10 \cdot 0,50 - 2,71 = 2,29 \quad [\text{A.10}]$$

Pertanto, dopo un periodo ($t=1$) in caso di rialzo il portafoglio avrà un valore pari a $S_a \Delta + B$, ($14 \cdot 0,50 - 3 = \$4$), mentre in caso di ribasso avrà un valore $S_b \Delta + B$, nullo ($6 \cdot 0,50 - 3 = \$0$), esattamente come l'opzione *call* (legge del *prezzo unico del portafoglio equivalente*)¹⁰.

Verifichiamo ora che il prezzo teorico dell'opzione ottenuto con la formula di *pricing* derivante dal principio di *non arbitraggio* equivalga al valore dell'opzione ottenuto sotto la misura di probabilità neutrale al rischio. Dobbiamo cioè verificare che il prezzo di \$2,29 determinato come prezzo di *non arbitraggio* corrisponda al valore scontato atteso dei *payoff* sotto la misura di probabilità q (la "pseudo-probabilità" che abbiamo definito nell'equazione A.6):

$$q = \frac{m-b}{a-b} = \frac{1,1-0,6}{1,4-0,6} = 0,625 \cong 0,63 \quad [\text{A.6 bis}]$$

$$C = \frac{1}{m} [qC_a + (1-q)C_b] = \frac{1}{1,1} [0,63 \cdot 4 + (1-0,63) \cdot 0] = 2,29$$

Estensione del *pricing* di non arbitraggio al caso di un generico derivato

I risultati ottenuti per l'opzione *call* possono essere estesi al caso di un generico strumento derivato con *payoff* rappresentato nella forma generale $Y(t+1) = f[S(t+1)]$ dove f è la funzione contrattualmente specificata¹¹ che lega il valore del derivato al valore del sottostante S .

Le condizioni da soddisfare affinché il portafoglio *stock-bond* replichi il *payoff* prodotto dal derivato sono espresse dal sistema lineare nelle incognite Δ e B :

$$\begin{cases} aS\Delta + mB = Y_a \\ bS\Delta + mB = Y_b \end{cases}$$

10 L'importo B_1 equivale alla somma di denaro che si deve restituire al tempo 1, esso non dipende dallo stato del mondo che si realizzerà in quanto il tasso di interesse come detto è fisso e pari a $i=0,10$. Pertanto in $t=1$ si dovrà restituire l'importo preso a prestito al tempo $t=0$ più gli interessi maturati, ovvero $B_1 = Bm = 2,72 \cdot 1,1 = 2,99 \sim 3$.

11 Nel caso di un'opzione *call* si ha $f(x) := \max\{x - K, 0\}$; un'opzione *put* si ottiene ponendo $f(x) := \max\{K - x, 0\}$.

La legge del prezzo unico richiede che il prezzo Y in t del derivato coincida col costo in t del portafoglio, per cui si ottiene la formula di *pricing*:

$$Y = S\Delta + B \quad [\text{A.11}]$$

Con passaggi analoghi a quelli effettuati per la *call*, usando ancora la misura di probabilità neutrale la rischio q :

$$q = \frac{m-b}{a-b},$$

si può scrivere l'equazione del *pricing* come:

$$Y = \frac{1}{m} [qY_a + (1 - q)Y_b] \quad [\text{A.12}]$$

Il valore dello strumento derivato può dunque essere interpretato come valore scontato atteso dei possibili prezzi nei 2 stati del mondo a e b ponderati per la misura di probabilità q , ovvero *risk-neutral* perché non dipende dall'avversione al rischio dei singoli operatori.

Il significato economico della valutazione *risk-neutral*

La formula di *pricing* [A.12] costituisce un risultato di grande rilevanza, sia teorica che operativa. Nella procedura di valutazione illustrata il fatto più evidente è che la probabilità p di rialzo (e la probabilità complementare $1-p$ di ribasso) non hanno alcun ruolo nel *pricing* e non compaiono né nell'equazione [A.11] né nella [A.12]. Nessuna ipotesi è stata inoltre introdotta riguardo al livello di avversione al rischio degli agenti di mercato.

Secondo il paradigma dell'utilità attesa, gli agenti economici, essendo massimizzatori di profitto e avversi al rischio, sono caratterizzati da una funzione di utilità monotona crescente e concava. Con questa impostazione un criterio per la valutazione del *payoff* aleatorio $Y(T)$ esigibile in $T=t+1$, effettuata da un agente con funzione di utilità $u(x)$, è costituito dall'attualizzazione al tasso *risk-free* i dell'equivalente certo di $Y(t+1)$, definito dalla:

$$\bar{Y}(t+1) = u^{-1}\{E_t[u(Y(t+1))]\} = u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)].$$

Secondo questo approccio si avrebbe cioè:

$$Y = \frac{1}{m} u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)],$$

o, con notazione compatta:

$$Y(t) = \frac{\bar{Y}(t+1)}{m}. \quad [\text{A.13}]$$

Per l'avversione al rischio l'equivalente certo, $\bar{Y}(t+1)$, non potrà essere maggiore del valore atteso di $Y(t+1)$; quindi:

$$\bar{Y}(t+1) \leq E_t[Y(t+1)],$$

ovvero:

$$u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)] \leq pY_a + (1-p)Y_b.$$

Quest'ultima espressione evidenzia il fatto che la disuguaglianza è una conseguenza diretta

della concavità della $u(x)$. Se si esclude il caso banale $Y_a = Y_b$ (corrispondente a un *payoff* deterministico) l'uguaglianza tra equivalente certo e valore atteso della lotteria potrà aversi solo se la funzione di utilità è lineare; cioè se l'agente che effettua la valutazione è indifferente al rischio (*risk-neutral*). Solo un agente indifferente al rischio valuterà il derivato secondo la regola:

$$Y(t) = \frac{E_t[Y(t+1)]}{m}. \quad [\text{A.14}]$$

È importante a questo punto osservare che, dovendo valere le disuguaglianze di arbitraggio $a > m > b$, il coefficiente q dell'equazione [A.12] è necessariamente compreso tra 0 e 1 e può quindi essere interpretato come una *pseudo-probabilità*. Se si accetta questa interpretazione, il fattore tra parentesi quadre nella formula di *pricing* [A.12] può quindi essere interpretato a sua volta come una aspettativa in t del *payoff* aleatorio $Y(t+1)$, calcolata usando le "pseudo-probabilità" q e $1-q$; si può cioè rappresentare come:

$$E_t^Q[Y(t+1)] = qY_a + (1-q)Y_b \quad [\text{A.15}]$$

dove E_t^Q rappresenta l'aspettativa calcolata in t secondo la probabilità q . Il prezzo del derivato in t può essere quindi espressa nella forma:

$$Y(t) = \frac{E_t^Q[Y(t+1)]}{m} \quad [\text{A.16}]$$

che esprime il prezzo del derivato in t come valore atteso dei possibili *payoff* a scadenza ponderati per la probabilità *risk-neutral* q scontato al tasso *risk-free* i ¹². In sostanza, il *pricing* indotto dal principio di arbitraggio si propone come un criterio di valutazione in ambiente indifferente al rischio. Si tratta infatti di una modalità di *pricing* analoga a quella che effettuerebbe un agente neutrale al rischio.

Per chiarire meglio quest'ultimo punto, si deve infatti considerare che, secondo il modello *standard* dell'utilità attesa, agenti economici avversi al rischio e caratterizzati da una funzione di utilità monotona crescente e concava $u(x)$ valuteranno il *payoff* aleatorio $Y(T)$, esigibile in $T=t+1$, attualizzando al tasso *risk-free* l'equivalente certo di $Y(t+1)$, definito come:

$$\bar{Y}(t+1) = u^{-1}\{E_t[u(Y(t+1))]\} = u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)].$$

Per l'agente avverso al rischio il valore del derivato in t è dunque:

$$Y = \frac{1}{m} u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)].$$

Assumendo un agente avverso al rischio, l'equivalente certo non potrà essere maggiore del valore atteso di $Y(t+1)$; e sarà quindi:

$$u^{-1}[pu(Y_a) + (1-p)u(Y_b)] \leq pY_a + (1-p)Y_b.$$

La disuguaglianza è una conseguenza diretta della concavità della funzione $u(x)$ che esprime appunto l'avversione al rischio dell'agente economico. Questo evidenzia appunto come solo un agente indifferente al rischio valuterà il derivato secondo la regola prima evidenziata:

$$Y(t) = \frac{E_t[Y(t+1)]}{m}.$$

12 Per una dimostrazione formale ma accessibile si veda Baxter e Rennie (1996).

Naturalmente, le condizioni di indifferenza al rischio sono soltanto apparenti: sostituendo nel calcolo dei valori attesi le probabilità "reali" p con le *pseudo-probabilità* q , gli agenti, che si assumono avversi al rischio, appaiono indifferenti al rischio.

Il senso dell'aggiustamento per il rischio prodotto dalla probabilità q è evidente se si confronta la [A.13] con la [A.16]. L'aspettativa *risk-neutral* $E_t^Q[Y(t+1)]$ svolge, evidentemente, il ruolo di equivalente certo; tuttavia l'abbattimento per il rischio della somma da attualizzare non è ottenuto modificando gli importi secondo la funzione di utilità, ma piuttosto modificando i pesi con cui questi vengono ponderati nel calcolo del valore atteso¹³.

È rilevante il fatto che la forma delle probabilità *risk-neutral*, e quindi la distorsione dei pesi nel calcolo dell'aspettativa aggiustata per il rischio, è la stessa per tutti i derivati scritti sullo stesso sottostante; è quindi una caratteristica della dinamica stocastica di S nel mercato.

Questa proprietà di aggiustamento per il rischio della probabilità q appare in tutta la sua importanza se si osserva che, mentre l'equivalente certo che compare nella [A.13] dipende dalla funzione di utilità $u(x)$, ed è quindi specifico dell'agente che effettua la valutazione, l'aspettativa *risk-neutral* definita dalla [A.15] è indipendente dalle preferenze, in quanto q resta specificata solo dai valori dei parametri a , b e m ; i primi due sono caratteristici dell'evoluzione del sottostante (sono cioè incorporati nei parametri dell'equazione stocastica prescelta per la descrizione del prezzo del sottostante), il terzo è un dato di mercato (tasso di interesse di un'attività priva di rischio).

Si conclude quindi che se c'è accordo tra gli agenti sui parametri a e b che caratterizzano la dinamica del processo S , un derivato su S dovrà avere lo stesso prezzo per tutti gli agenti, indipendentemente dalle probabilità soggettive p e dalla personale funzione di utilità $u(x)$. Il prezzo è fornito dalla [A.12], o dalla [A.16], ed è l'unico che esclude la possibilità di arbitraggio. In definitiva, il metodo del *pricing* secondo il principio di non-arbitraggio assicura che anche agenti avversi al rischio effettueranno una valutazione del derivato "come se" fossero soggetti neutrali al rischio (anche se in realtà non lo sono) ed è per questo motivo che la probabilità q è denominata *neutrale rispetto al rischio* o *risk-neutral*.

Le proprietà di martingala

Per apprezzare le proprietà probabilistiche di una martingala¹⁴ dobbiamo estendere il modello CRR (ovvero il modello binomiale ad un periodo) alla valutazione di un generico derivato su S con n passi alla scadenza (ovvero un modello binomiale multi-periodale). Facendo ancora riferimento a un sottostante che non paga dividendi e a un derivato con generico *payoff* $Y(t+n) = f[S(t+n)]$ per il quale non sia consentito l'esercizio anticipato, è evidente che, applicando le stesse considerazioni di

13 In questi casi si parla di *risk loading implicito*, definibile come $L = E_t^Q[Y(t+1)] - \bar{Y}(t+1)$. Il segno di questo premio per il rischio dipenderà dal valore delle probabilità *risk-neutral*. Nella valutazione di derivati, L non dipende dall'avversione al rischio del valutatore, ma è determinato dai dati di mercato (è cioè quello implicitamente incorporato nei prezzi osservati). In questo senso, si può dire che L esprime l'aggiustamento per il rischio richiesto dall'agente rappresentativo del mercato.

14 A partire dalla successione di variabili aleatorie X_n , si definisce il processo stocastico nel tempo discreto $Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^n X_k$. Il processo Y_n è una martingala se $E_{n-1}(Y_n) = Y_{n-1}$. Dato che Y_{n-1} è noto al tempo $n-1$ allora si può scrivere $E_{n-1}(Y_n - Y_{n-1}) = 0$. Quindi una martingala si può intuitivamente caratterizzare come un processo i cui incrementi costituiscono i "guadagni" di un gioco equo.

arbitraggio svolte per la *call*, si giunge a una formula binomiale per il prezzo in t , espressa dalla:

$$Y = \frac{1}{m^n} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k (1-q)^{n-k} f(a^k b^{n-k} S) \right], \quad [\text{A.17}]$$

dato che $f(a^k b^{n-k} S)$ è il valore assunto da $Y(t+n)$ dopo k rialzi e $n-k$ ribassi di prezzo.

Il prezzo del derivato fornito dalla formula binomiale [A.17] può anche essere rappresentato nella consueta forma di aspettativa *risk-neutral* scontata:

$$Y(t) = \frac{1}{(1+i)^n} E_t^Q [Y(t+n)]. \quad [\text{A.18}]$$

Questa relazione è direttamente collegata a una proprietà probabilistica di grande rilevanza. La [A.18] è stata ricavata specificando t come l'istante corrente e $t+n$ come la data T di scadenza del derivato. Tuttavia, considerando la linea di argomentazione che ha condotto alla [A.18], è facile verificare che la relazione dovrà restare valida se applicata, in un qualsiasi istante futuro $\theta \leq T$, alla valutazione di un *payoff* esigibile in una data successiva $\tau \leq T$. Deve cioè aversi:

$$Y(\theta) = \frac{1}{(1+i)^{\tau-\theta}} E_\theta^Q [Y(\tau)], \quad t \leq \theta \leq \tau \leq T. \quad [\text{A.19}]$$

Se si definisce allora il *processo di prezzo scontato*:

$$Y^*(\theta) = \frac{Y(\theta)}{(1+i)^{\theta-t}} \quad [\text{A.20}]$$

si ha:

$$Y^*(\theta) = E_\theta^Q [Y^*(\theta+1)]. \quad [\text{A.21}]$$

Infatti, per la definizione [A.20], risulta:

$$E_\theta^Q [Y^*(\theta+1)] = E_\theta^Q \left[\frac{Y(\theta+1)}{(1+i)^{\theta+1-t}} \right] = \frac{1}{(1+i)^{\theta-t}} E_\theta^Q \left[\frac{Y(\theta+1)}{(1+i)} \right];$$

per la [A.19] si ha anche:

$$\frac{1}{(1+i)^{\theta-t}} E_\theta^Q \left[\frac{Y(\theta+1)}{1+i} \right] = \frac{Y(\theta)}{(1+i)^{\theta-t}} = Y_\theta^*.$$

La [A.21] afferma pertanto che il processo di prezzo scontato del derivato è una *martingala* rispetto alla probabilità *risk-neutral*.

In termini generali si può affermare che sotto la misura di probabilità neutrale al rischio il valore scontato di un derivato è una *martingala*:

$$\frac{Y_n}{(1+i)^n} = E_n^Q \left[\frac{Y_{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Da cui si ricava il "*Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing*" secondo cui:

$$E^Q \frac{Y_n}{(1+i)^n} = Y_0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad [\text{A.22}]$$

Si può dire pertanto che in qualsiasi istante di tempo gli incrementi futuri del processo di prezzo scontato hanno media nulla, se la media è calcolata con le probabilità *risk-neutral*¹⁵.

15 Cfr. per una trattazione più completa Baxter e Rennie (1996) e Shreve (2004).

Il Box 1 ha illustrato in maniera semplificata le idee economiche alla base dei lavori originali di Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black, mettendo in evidenza, in particolare, il ruolo centrale della condizione cosiddetta di "assenza di arbitraggio" e di "completezza" dei mercati (cioè la possibilità di replicare uno strumento derivato usando le attività finanziarie sottostanti) che è alla base dell'articolo originale di Black e Scholes del 1973¹⁶, dove essi sfruttano l'idea che un portafoglio privo di rischio composto da opzioni e azioni, in mercati efficienti, deve rendere il tasso *risk-free*. Ciò permette a Black e Scholes di derivare una formula chiusa per il prezzo del derivato che non dipende dall'avversione rischio degli operatori.

Il motivo per cui è possibile formare un portafoglio privo di rischio dipende dal fatto che il prezzo dell'azione e il prezzo dell'opzione sono entrambi influenzati dalla stessa fonte di incertezza: le variazioni del prezzo dell'azione. In ogni breve intervallo di tempo, il prezzo di una *call* è perfettamente correlato, in modo positivo, con il prezzo del titolo sottostante ed il prezzo di una *put* è perfettamente correlato, in modo negativo, con il prezzo del titolo sottostante. In entrambi i casi, quando si forma un appropriato portafoglio di azioni e opzioni, il profitto o la perdita sulla posizione in titoli viene sempre compensato dalla perdita o dal profitto sulla posizione in opzioni cosicché il valore complessivo del portafoglio alla fine del breve intervallo di tempo risulta sempre noto con certezza. Pertanto, in assenza di opportunità di arbitraggi, il tasso di rendimento del portafoglio deve essere pari al tasso di interesse privo di rischio r ¹⁷.

Quando non esiste una formula chiusa per determinare il prezzo di uno strumento derivato legato ai prezzi azionari è necessario, come prima anticipato, simulare l'andamento futuro dei flussi di cassa (*pay-off*). Il problema matematico che si pone in questo caso è tecnicamente diverso, o comunque di carattere più generale, rispetto a quello affrontato nel lavoro di Black e Scholes del 1973. Il problema, è quello di dimostrare matematicamente che, ai fini del *pricing*, è possibile usare l'equazione (2) invece che l'equazione (1) per simulare i flussi di cassa futuri del derivato.

Infatti, i risultati dei lavori di Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black sono stati successivamente generalizzati dal punto di vista matematico, mostrando che, sotto certe condizioni, è possibile calcolare il prezzo di un derivato come valore atteso scontato dei flussi di cassa futuri (*pay-off* futuri) usando una misura di probabilità *risk-neutral* diversa dalle probabilità *real-world*. Tale cambio di misura ha l'enorme vantaggio di rendere fattibile e univoca la simulazione del processo stocastico del prezzo del sottostante in quanto consente di passare dall'equazione (1) – che contiene un parametro incognito ovvero non univocamente determinabile, cioè μ – all'equazione (2), dove figura invece il tasso *risk-free* r al posto del *drift* che è inve-

16 Black, F. e Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, "Journal of Political Economy", n°81, pp. 637-659.

17 C'è un'importante differenza tra l'analisi di Black-Scholes-Merton e l'analisi con il modello binomiale del Box 1. In Black-Scholes-Merton, il portafoglio che viene formato è privo di rischio solo per un breve intervallo di tempo (teoricamente, resta privo di rischio solo per un periodo istantaneamente breve). È comunque vero che il tasso di rendimento del portafoglio privo di rischio, in ogni periodo di tempo breve, deve essere pari al tasso di interesse privo di rischio. È questo l'elemento chiave che ha consentito a Black e Scholes di ottenere le loro formule di valutazione.

ce facilmente stimabile e dove quindi l'unica altra incognita da stimare è la volatilità σ , che si può agevolmente ricavare come volatilità implicita estratta dai prezzi di mercato delle opzioni sull'attività sottostante.

Di seguito si delineano i concetti fondamentali alla base di questo risultato, rimandando al Box 2 per un'illustrazione più analitica.

Come prima evidenziato, in termini generali, il prezzo di un prodotto derivato al tempo t che genera flussi di cassa aleatori X_T al tempo T è pari al valore atteso dei flussi di cassa futuri attualizzati, cioè $P_t = E_P[X_T] * K(t, T)$, laddove con E_P si indica il valore atteso dei flussi di cassa X_T sotto la misura di probabilità P , mentre $K(t, T)$ è il fattore di attualizzazione (ossia il prezzo di uno *zero-coupon bond* che dà un *pay-off* unitario a scadenza).

È possibile dimostrare che, sotto certe condizioni che verranno meglio dettagliate oltre, lo stesso prezzo si ottiene utilizzando una misura di probabilità *risk-neutral* Q , cioè si ha che $P_t = E_Q \left[\frac{dP}{dQ} * X_T \right] * K(t, T)$, laddove E_Q indica il valore atteso sotto la misura di probabilità neutrale verso il rischio Q , $\frac{dP}{dQ}$ è la cosiddetta derivata di Radon–Nikodym e $K(t, T)$ è ancora il fattore di attualizzazione.

Se quanto detto rappresenta in termini generali la questione dal punto di vista matematico-probabilistico, applicando alcuni risultati generali della teoria delle probabilità è possibile mostrare che, sotto determinate condizioni di efficienza dei mercati finanziari e di assenza di arbitraggio, il passaggio da una misura di probabilità *real-world* (P) ad una misura di probabilità neutrale al rischio (Q) rende possibile il cambiamento del *drift* del processo (e non della sua volatilità) che descrive l'andamento della variabile aleatoria (nel nostro caso il prezzo di un'azione).

In sostanza, questi risultati matematici dimostrano in maniera formale come sia possibile calcolare il prezzo di uno strumento derivato utilizzando la misura di probabilità neutrale verso il rischio cambiando unicamente il *drift* del processo stocastico specificato sotto la misura di probabilità neutrale al rischio. Semplificando al massimo, questi risultati mostrano come sia legittimo, sotto certe condizioni, usare l'equazione (2) (senza premio al rischio) in luogo dell'equazione (1) (con premio al rischio) per effettuare il *pricing* di uno strumento derivato legato all'andamento dei prezzi azionari, ossia usare l'equazione (2) per simulare la dinamica futura dei flussi di cassa del derivato e simularne una distribuzione di probabilità ad una data futura T .

Più in dettaglio, la derivata di Radon–Nikodym e il teorema di Girsanov individuano quali sono le modalità di passaggio da una misura di probabilità reale P ad un'altra *risk-neutral* Q nel caso di un moto geometrico browniano, tali che le due misure di probabilità possano risultare "equivalenti" ai fini del calcolo del valore atteso¹⁸. Ciò tuttavia non comporta che su insiemi di eventi identici le due misure di pro-

18 Per il *Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing* la misura neutrale al rischio è – sotto l'ipotesi di mercati completi – la sola misura di probabilità sotto la quale il processo stocastico del *payoff* finale del prodotto scontato al tasso di interesse privo di rischio è una martingala.

babilità assumono valori uguali né che ci sia l'uguaglianza dei momenti delle distribuzioni di probabilità diversi dal valore scontato atteso.

È cruciale, inoltre, sottolineare quali sono le condizioni sotto le quali è legittimo usare l'approccio *risk-neutral* per capirne a fondo la logica economica. Tali condizioni sono fondamentalmente quelle di mercati finanziari efficienti e completi definite nell'articolo originale di Black e Scholes.

In sostanza, i risultati matematici che abbiamo sopra illustrato non fanno altro che generalizzare e formalizzare sul piano analitico le idee di Black e Scholes, mostrando che, in generale, se sono valide le condizioni di mercati efficienti, di assenza di arbitraggio e di replicabilità del derivato con le attività sottostanti, è possibile utilizzare per (sole) finalità di *pricing* modelli stocastici che non tengono conto del premio al rischio dei partecipanti al mercato.

Il Box 2 (che riprende elementi di analisi presenti nei più diffusi manuali avanzati di calcolo stocastico) fornisce un'illustrazione più formale e analitica dell'apparato matematico che consente di dimostrare come il passaggio dall'equazione (1) all'equazione (2) rappresenti effettivamente un cambio della misura di probabilità, ossia un passaggio da una misura di probabilità reale (P) ad una misura *risk-neutral* (Q), e come tale cambio di misura assicuri l'equivalenza ai fini del calcolo del prezzo del derivato.

Box 2 – Il passaggio dalla probabilità reale (P) alla probabilità *risk-neutral* (Q) nel caso del moto geometrico browniano

Cambio di misura e derivata di Radon-Nikodym

Il cambio di misura – ovvero il passaggio dalle probabilità reali P alle probabilità *risk-neutral* Q – costituisce un requisito indispensabile per poter trattare l'equazione stocastica per la simulazione dei *pay-off* del prodotto finanziario derivato. Come abbiamo già accennato il risultato più importante del cambio di misura consiste nella sostituzione del tasso di rendimento atteso del prezzo del sottostante – indicato con il simbolo μ nell'equazione [1] – con il tasso *risk-free*, indicato con il simbolo r nell'equazione [2]. Questo risultato è di fondamentale importanza perché consente di sostituire un valore incognito (μ) con un valore osservabile e pertanto noto e univoco (r)¹⁹.

Consideriamo P e Q come due misure di probabilità su uno spazio di eventi finito Ω e assumiamo che $P(w) > 0$ e $Q(w) > 0$ per ogni $w \in \Omega$. Se definiamo la variabile casuale

$$Z(w) = \frac{Q(w)}{P(w)} \quad [\text{B.1}]$$

allora avremo che valgono le seguenti proprietà:

19 Non discuteremo in questa sede le assunzioni teoriche e il dibattito accademico in merito alla definizione e alla conseguente scelta dell'attività priva di rischio impiegata come *benchmark*.

- (i) $P(Z > 0) = 1$;
(ii) $E^P Z = 1$;
(iii) per ogni variabile casuale Y si avrà che $E^Q Y = E^P [ZY]$, ovvero che il valore atteso della variabile casuale Y sotto la misura di probabilità Q è uguale al valore atteso sotto la probabilità P della variabile casuale Y trasformata attraverso la variabile casuale Z .

La dimostrazione della proprietà (iii) si ricava facilmente:

$$E^Q Y = \sum_{w \in \Omega} Y(w) Q(w) = \sum_{w \in \Omega} Y(w) \frac{Q(w)}{P(w)} P(w) = \sum_{w \in \Omega} Y(w) Z(w) P(w) = E^P [ZY]$$

Se passiamo dal discreto al continuo il cambio di misura dalle probabilità reali P alle probabilità *risk-neutral* Q si ottiene di nuovo definendo uno spazio di probabilità (Ω, F, P) e assumendo che Z sia una variabile non negativa tale che $E^P Z = 1$. Pertanto, per ogni $A \in F$ si avrà

$$Q(A) = \int_A Z(w) dP(w) \quad [\text{B.2}]$$

ovvero Q è una nuova misura di probabilità tale che:

$$E^Q Y = E^P [ZY]. \quad [\text{B.3}]$$

Possiamo allora affermare che la variabile casuale Z rappresenta la *derivata di Radon-Nikodym* di Q rispetto a P , ovvero:

$$Z = \frac{dQ}{dP} \quad [\text{B.4}]$$

Moto browniano sotto la misura di probabilità neutrale al rischio

Il cambio di misura di probabilità, i cui dettagli analitici sono stati forniti nello schema precedente, unitamente ad una applicazione del teorema di Girsanov, consente di realizzare la sostituzione del parametro μ con il tasso di interesse *risk-free* r che costituisce, come detto, la premessa metodologica che rende possibile simulare le traiettorie di prezzo del sottostante e pertanto ottenere la distribuzione di probabilità del prezzo a scadenza del prodotto derivato che si intende valutare.

Teorema di Girsanov: sia $W(t)$, con $0 \leq t \leq T$, un moto Browniano definito su uno spazio (Ω, F, P) e sia $\theta(t)$, con $0 \leq t \leq T$, un generico processo stocastico. Se definiamo:

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\} \quad [\text{B.5}]$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u) du \quad [\text{B.5}]$$

avremo che, sotto la misura di probabilità neutrale al rischio definita nell'equazione [B.2] il processo stocastico $\tilde{W}(t)$ è anch'esso un moto Browniano.

A questo punto possiamo partire con l'equazione stocastica che descrive il movimento nel tempo del prezzo delle azioni:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), 0 \leq t \leq T \quad [\text{B.6}]$$

dove μ rappresenta il tasso atteso di rendimento dell'azione e σ la volatilità.

Il processo di prezzo descritto dall'equazione [B.6] è un moto geometrico Browniano con *drift* e può essere scritto in una forma equivalente anche come:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds\right\} \quad [\text{B.7}]$$

Supponiamo in aggiunta di avere un processo che descrive il tasso di interesse $R(t)$. Possiamo allora scrivere il processo di sconto come:

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds} \quad [\text{B.8}]$$

e attraverso un'applicazione della formula di Itô-Doeblin avremo che:

$$dD(t) = -R(t)D(t)dt. \quad [\text{B.9}]$$

Il processo di prezzo scontato pertanto sarà:

$$D(t)S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds\right\}$$

e il suo differenziale è:

$$d(D(t)S(t)) = (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dW(t) = \sigma(t)D(t)S(t)[\theta(t)dt + dW(t)] \quad [\text{B.10}]$$

dove abbiamo definito il prezzo di mercato del rischio come:

$$\theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)}.$$

Il problema del *pricing*, in base all'idea originaria di Black e Scholes discussa nel testo, consiste nel passare ad una nuova misura di probabilità Q che escluda la possibilità di arbitraggio. Questa condizione è sufficiente per trovare l'unica misura martingala di probabilità Q equivalente a P che ci offre il prezzo di un *contingent claim* (Harrison & Kreps, 1978).

Per applicare il cambio di misura alla nostra equazione differenziale stocastica facciamo ricorso alle principali conclusioni del Teorema di Girsanov che stabilisce che sotto la misura di probabilità Q il processo stocastico $\tilde{W}(t)$ definito nella [B.5] è moto Browniano. Possiamo allora riscrivere la [B.10] nei termini del processo stocastico $\tilde{W}(t)$ come:

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{W}(t). \quad [\text{B.11}]$$

La misura di probabilità sottesa all'equazione [B.11] è come detto la misura di probabilità neutrale al rischio equivalente a quella reale e che rende il processore prezzo scontato $D(t)S(t)$ una martingala.

Il processo di prezzo originario $S(t)$ – ovvero quello non scontato – ha pertanto un tasso di rendimento atteso uguale al tasso di interesse privo di rischio sotto la misura di probabilità neutrale al rischio Q . Si può infatti facilmente verificare che, sostituendo

$$dW(t) = -\theta(t)dt + d\tilde{W}(t) \quad \text{[ottenuta dalla B.5]}$$

nella [B.6] si ha:

$$dS(t) = R(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{W}(t). \quad \text{[B.12]}$$

Questo cambio di misura di probabilità ha consentito di sostituire nella [B.6] il tasso di rendimento del sottostante μ con il tasso di interesse *risk-free* r . L'univocità nel valore di r consente di dire che Q rappresenta l'unica misura equivalente di martingala che descrive l'andamento del sottostante S .

Questo non significa ovviamente che i prezzi delle azioni siano processi privi di un rendimento (*drift*) pari a μ e che la misura Q contenga le caratteristiche storiche effettivamente comprese nella misura originaria P . In sostanza, la misura Q e la sua funzione di densità sono meramente un "espediente" matematico utilizzato per finalità computazionali ed hanno un contenuto informativo ben diverso da quello della densità di probabilità "vera" P .

Nel Box 3 si illustra, infine, come in concreto vengono simulati flussi di cassa di un derivato e come viene stimato il suo prezzo ad una data futura T , attraverso metodi di simulazione cosiddetti Monte Carlo.

Box 3 – Calcolo del prezzo di un derivato ad una data futura T applicando probabilità *risk-neutral* con il metodo Monte Carlo

Le tecniche di simulazione, che rientrano nella classe dei cosiddetti *metodi Monte Carlo*, sono utilizzate in finanza come metodi numerici per il *pricing* di contratti derivati per i quali non sono disponibili espressioni del prezzo in forma chiusa. Nei modelli di arbitraggio il prezzo $V(t)$ di un derivato è sempre esprimibile come il valore atteso, secondo la probabilità *risk-neutral*, del valore scontato del *payoff* fornito dal contratto.

Si consideri un derivato che abbia come sottostante uno strumento finanziario il cui prezzo segue il processo stocastico $Y(t)$, che abbia scadenza in T e *payoff* $V(T) = f(Y_T)$, cioè valore a scadenza espresso come una prefissata funzione f del valore assunto in T da Y . Se i tassi di interesse sono deterministici e costanti al livello i , il prezzo in t del derivato è dato da:

$$V(t) = \frac{1}{(1+i)^{T-t}} E_t^Q [f(Y_T)] \quad \text{[C.1]}$$

Dove l'aspettativa E_t^Q è calcolata secondo la misura di probabilità *risk-neutral*, cioè la distribuzione di probabilità in base alla quale il processo del prezzo contato $Y^*(t)$ è una martingala (Q è detta anche "misura a martingala equivalente").

Se la dinamica stocastica del sottostante o la forma della funzione f hanno struttura complessa, può accadere che non sia possibile ricavare una formula esplicita per $V(t)$; si può allora utilizzare il metodo Monte Carlo²⁰ per ricavare il valore numerico dell'aspettativa nella [C.1].

Si tratta di simulare un numero N sufficientemente grande di traiettorie di Y dalla data corrente t alla data di scadenza T , di calcolare $V(T) = f(Y_T)$ in corrispondenza del valore finale di ogni traiettoria e di calcolare quindi la media aritmetica degli N valori di $V(T)$ ottenuti; questa media verrà poi scontata al tasso i . Naturalmente le traiettorie andranno simulate utilizzando l'equazione differenziale stocastica che corrisponde alla misura di probabilità Q e partendo ogni volta dal valore corrente del prezzo del sottostante, "reiniziando" cioè la procedura con $Y(t)$.

Il punto di partenza è l'ipotesi sulla forma funzionale della funzione $Y(t)$; se il sottostante è il prezzo di un'azione, è possibile usare l'equazione (2) del moto geometrico browniano illustrata nel testo. Infatti, grazie al passaggio dalle probabilità reali P alle probabilità *risk-neutral* Q , l'equazione (2) presenta una sola incognita, ovvero la volatilità σ , che, come detto, può essere agevolmente estratta dal prezzo corrente del sottostante $Y(t)$.

Se si indica con $\tilde{Y}_k(T)$ il valore simulato di $Y(T)$ nella k -esima traiettoria, il prezzo del derivato viene quindi ottenuto dalla:

$$V(t) = \frac{1}{(1+i)^{T-t}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[\tilde{Y}_k(T)] \quad [C.2]$$

In termini statistici, a parte il "discounting" questa procedura può essere vista come una stima della media di una distribuzione assegnata, effettuata tramite osservazioni campionarie ripetute. La differenza rispetto al problema di stima tradizionale sta nel fatto che non si tratta di osservazioni reali, ma piuttosto generate artificialmente utilizzando la distribuzione di probabilità *risk-neutral* del sottostante. Se si indica con E il valore dell'aspettativa da stimare, cioè se si pone:

$$E = E_t^Q [f(Y_T)] \quad [C.3]$$

allora il momento primo della distribuzione dei valori simulati (la media campionaria) può essere inteso uno "stimatore Monte Carlo" di E :

$$\hat{E} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[\tilde{Y}_k(T)] \quad [C.4]$$

Se i valori campionati sono effettivamente generati dalla distribuzione sottostante (cioè se il generatore di numeri casuali non introduce distorsioni), questo stimatore è non-distorto; la media della distribuzione di \hat{E} coincide cioè con il valore E da stimare.

20 Sull'introduzione dei metodi Monte Carlo si veda J.M. Hammersley e D.C. Handscomb (*Monte Carlo methods*, London, Methuen, 1964). L'applicazione di questi metodi all'*option pricing* è stata inaugurata da P.P. Boyle nel 1977 (*Options: a Monte Carlo approach*, "Journal of Financial Economics", n. 4, 1977). Più recenti sviluppi e approfondimenti sono forniti in P.P. Boyle, M. Broadie e P. Glasserman, *Monte Carlo methods for security pricing*, "Journal of Economic Dynamics and Control", n. 21, 1997.

2.2 Limiti informativi delle probabilità *risk-neutral*

Riassumendo quanto sopra illustrato, sotto determinate condizioni di efficienza e completezza dei mercati e assenza di arbitraggio, cioè di replicabilità dei derivati con le attività sottostanti, è possibile usare, per sole finalità di *pricing*, modelli per simulare la dinamica dei prezzi delle attività finanziarie che non tengono conto del premio al rischio soggettivo.

La metodologia di *pricing* sin qui descritta si fonda quindi sull'efficienza informativa dei mercati "in senso forte", ovvero assume che tutta l'informazione sia incorporata nel prezzo corrente di mercato, che come detto è l'unico *input* che viene utilizzato per la stima della distribuzione a scadenza del prezzo del derivato²¹.

Infatti, l'unica informazione che viene impiegata in tutto il processo descritto è il prezzo e la volatilità del prezzo del sottostante del prodotto derivato che si intende prezzare:

- i. dall'osservazione del prezzo di mercato delle opzioni *standard* si ricava la volatilità implicita del sottostante;
- ii. la volatilità implicita è a sua volta inserita nell'equazione (2) che a questo punto risulta completa (essendo l'altra incognita dell'equazione il tasso *risk-free* r , che può essere posto uguale al rendimento dei titoli di Stato ad alto *rating* o a tassi *swap*).
- iii. si fanno N simulazioni dell'equazione (2) e poi si calcola il valore atteso scontato dei vari *pay-off*, che è quindi il prezzo del derivato alla data corrente secondo la funzione che lega il prezzo del sottostante al valore del derivato. Se si organizzano in tabella diverse partizioni della distribuzione di probabilità alla data futura T del valore del derivato si avranno i cosiddetti "scenari probabilistici".

Questo approccio è, come detto, basato sull'uso di distribuzioni di probabilità *risk-neutral* e si è illustrato come esso sia corretto da un punto di vista matematico solo per le finalità di *pricing* e cioè di calcolo del *fair value* del derivato, che è dato dal valore atteso scontato della distribuzione di probabilità dei possibili prezzi futuri ottenuti simulando l'andamento dei flussi di cassa del derivato. Si è visto, infatti, che il valore atteso scontato sotto una distribuzione di probabilità *risk-neutral* (Q) coincide, in determinate condizioni, con il valore atteso scontato calcolato sotto una distribuzione di probabilità "reale" (P) che riflette il premio al rischio.

In sostanza, e semplificando al massimo, i risultati matematici prima illustrati consentono di utilizzare la distribuzione *risk-neutral* solo per finalità di calcolo del valore scontato atteso, cioè di *pricing* dei derivati, mentre l'utilizzo delle partizioni della distribuzione di probabilità *risk-neutral* ad una data futura T (i cosiddetti "scenari di probabilità") non fornisce un'indicazione "reale" della probabilità di accadimento dei possibili scenari di prezzo del prodotto derivato, in quanto tali probabilità sono state ricavate da un modello di *pricing* di non-arbitraggio che comporta neutralità al rischio, mentre è verosimile assumere che gli agenti economici siano avversi al rischio.

21 Da cui si ricava la volatilità implicita da utilizzare quale parametro dell'equazione differenziale stocastica di cui poi si simulano le traiettorie.

Il ricorso a distribuzioni di probabilità *risk-neutral* non rappresenta quindi uno strumento valido (da un punto di vista informativo) per finalità diverse dal *pricing*, quali ad esempio il calcolo delle probabilità di perdite o di guadagni di un derivato o di un prodotto strutturato in un determinato intervallo temporale. Gli "scenari probabilistici", che si propongono di fornire – ad investitori prevalentemente se non esclusivamente non sofisticati – informazioni sulla probabilità che il prezzo ad una determinata data futura sia superiore/inferiore a determinate soglie, dovrebbero pertanto tenere conto dei suddetti profili di criticità.

È infatti necessario usare probabilità "reali", cioè probabilità che tengono conto dell'avversione al rischio dei singoli individui; è necessario, in sostanza, ponderare i flussi di cassa ottenuti mediante simulazione per le probabilità "reali", che riflettono l'avversione al rischio del soggetto, e non per le probabilità *risk-neutral*. In altri termini, è necessario simulare i *pay-off* del derivato usando l'equazione (1) del par. 2.1, che si basa sull'assunto che gli agenti economici sono disposti a investire in azioni solo se il loro rendimento atteso è superiore al tasso *risk-free*, e non invece l'equazione (2), che ipotizza che gli investitori sono disposti a detenere azioni anche se queste rendono solo il tasso *risk-free*.

Ciò è teoricamente possibile ma rende il problema indeterminato se riferito alla generalità degli investitori, poiché l'avversione al rischio – ovvero il premio al rischio richiesto per investire in azioni – varia fra i partecipanti al mercato e quindi non è possibile calcolare in maniera univoca le probabilità associate alla distribuzione del valore del derivato ad una data futura con un valore unico per tutti i soggetti. Esiste infatti un'ampia letteratura che documenta la forte variabilità del premio al rischio sul mercato azionario sia nella diverse fasi del ciclo economico sia fra diverse aree geografiche; Siciliano (2001), ad esempio, mostra come il premio al rischio abbia una fortissima variabilità se misurato sull'arco di circa un secolo e dati più recenti e aggiornati di Dimson *et al.* (2003) e Fama e French (2001) confermano queste evidenze. Questo filone di letteratura è nato dal lavoro originale di Siegel (1994) che per primo ha evidenziato non solo la variabilità del premio al rischio su orizzonti tempo molto lunghi ma anche il risultato paradossale per cui nel lungo periodo la variabilità dei rendimenti azionari può essere inferiore a quella dei rendimenti dei titoli di Stato *risk-free*.

Il cosiddetto *capital asset pricing model* (cosiddetto CAPM) fornirebbe in teoria un modello di equilibrio per determinare il premio al rischio di un singolo titolo azionario (o di un portafoglio) ma un'ampia letteratura empirica (la cui rassegna sistematica è al di là degli obiettivi di questo lavoro) ha mostrato chiaramente come il modello (anche nella versioni "modificate" che includono altri fattori di rischio oltre a quello legato alla covarianza con il rendimento del portafoglio di mercato, ossia il cosiddetto "Fama-French *three factors model*") abbia una bassa capacità esplicativa sui dati storici e quindi il suo utilizzo non può fornire uno strumento affidabile per la stima del premio al rischio, come evidenziato, fra gli altri, da Fama e French (2003) e (2006), Ang e Chen (2003), Campbell e Vuolteenaho (2004), Hou *et al.* (2011) e Cochrane (2011).

Naturalmente, questo non vuol dire che il metodo degli "scenari probabilistici" non possa essere utilizzato per finalità di *risk management*; anzi, gli intermediari utilizzando normalmente questo approccio, ma correggono opportunamente la distribuzione *risk-neutral* per una misura soggettiva del premio al rischio che riflette le valutazioni del singolo intermediario circa le prospettive future dei rendimenti azionari. Infatti, un'applicazione dell'approccio degli "scenari probabilistici" si può ritrovare nel calcolo del cosiddetto *value at risk* (VaR), ossia uno strumento base di *risk management* che consiste nel calcolo della perdita attesa su un prodotto o strumento finanziario in corrispondenza di un determinato percentile della distribuzione di probabilità del valore del prodotto finanziario ad una certa data futura. Il calcolo del VaR richiede quindi di stimare la distribuzione di probabilità del valore di un prodotto finanziario ad una certa data futura, esattamente come nel metodo degli scenari probabilistici, ma facendo ipotesi esplicite sul premio al rischio e dunque usando probabilità "reali", come è evidenziato nel semplice esempio riportato nel Box 4.

Box 4 – Calcolo del VaR e distribuzioni di probabilità *real world*

Si supponga di dovere calcolare il VaR di un prodotto strutturato il cui prezzo P dipende in modo non lineare dal prezzo S di una azione; il prezzo P può essere stimato applicando l'approssimazione in serie di Taylor:

$$\Delta P = S\delta\Delta x + \frac{1}{2}S^2\gamma(\Delta x)^2$$

laddove δ e γ sono rispettivamente la derivata di ordine uno e due del prezzo del prodotto derivato rispetto ad S , mentre $\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$, cioè il rendimento dell'azione. La variabile ΔP non ha una distribuzione nota, ma si può dimostrare che Δx ha una distribuzione normale qualora S segua il processo stocastico definito dal moto geometrico browniano. In questo caso, per calcolare il VaR è sufficiente stimare la distribuzione di probabilità di ΔP estraendo valori di Δx da una distribuzione normale e applicare l'equazione (2). Nell'ambito della metodologia appena descritta, la media e la varianza della distribuzione di Δx vengono stimate su dati storici; poiché la media di Δx stimata su dati storici include il (o una stima del) premio al rischio, si ottiene una distribuzione di probabilità relativa a ΔP che è "reale" e non *risk-neutral*.

Naturalmente, poiché in concreto il VaR viene usato per calcolare il rischio su un orizzonte temporale brevissimo, ad esempio un giorno, è possibile di fatto ignorare il problema del premio al rischio e ipotizzare che il rendimento giornaliero di un'azione sia pari a zero o al tasso *risk-free* senza commettere errori significativi dal punto di vista pratico, per cui il VaR dipende esclusivamente dalla volatilità ipotizzata (che può essere anche quella implicita invece che quella stimata su dati storici)²². Quest'approccio è invece non corretto, come prima mostrato, quando l'orizzonte temporale dell'attività di *risk management* si allunga e il VaR viene utilizzato per valutare il rischio di esposizione su orizzonti di medio-lungo periodo.

22 In questo caso è possibile poi applicare la cosiddetta regola della radice quadrata, per cui il VaR a 10 giorni può essere ai fini pratici calcolato moltiplicando per la radice di 10 il VaR a un giorno (cfr., ad esempio, Banca d'Italia, Nuove disposizioni di vigilanza prudenziale per le banche, circolare n.263 del 27 dicembre 2006).

L'esempio nel Box 5, sebbene riferito al caso di strumenti obbligazionari, mostra invece chiaramente che anche quando si effettuano le analisi degli scenari per il calcolo delle perdite potenziali da insolvenza si devono usare le probabilità reali e non *risk-neutral*²³.

Box 5 – Prezzi dei *bonds* ed evidenza empirica sulle insolvenze: mondo neutrale verso il rischio e mondo reale

Si definiscano le seguenti variabili:

$y(T)$: tasso di rendimento di uno *zero-coupon bond* emesso da una società, con scadenza al tempo T ;

$y^*(T)$: tasso di rendimento di uno *zero-coupon bond* privo di rischio, con scadenza al tempo T ;

$Q(T)$: probabilità che la società fallisca nel periodo compreso tra 0 e il tempo T .

Il valore corrente di uno *zero-coupon bond* privo di rischio, con valore nominale di \$100 e scadenza al tempo T è:

$$\$100 \times e^{-y^*(T)T}$$

mentre il valore corrente del titolo corrispondente emesso dalla società è:

$$\$100 \times e^{-y(T)T}.$$

Pertanto, il valore attuale delle perdita attesa è:

$$\$100 \times [e^{-y^*(T)T} - e^{-y(T)T}].$$

Assumendo che il tasso di recupero in caso di insolvenza sia nullo, ci sarà una probabilità $Q(T)$ che, alla scadenza, il titolo emesso dalla società valga \$0 e una probabilità $1 - Q(T)$ che valga \$100. Pertanto, il valore corrente del titolo è:

$$\{Q(T) \times \$0 + [1 - Q(T)] \times \$100\}e^{-y^*(T)T} \quad \text{[D.1]}$$

ovvero

$$\$100 \times [1 - Q(T)]e^{-y^*(T)T}.$$

Si noti che nell'equazione [D.1] il *payoff* atteso del titolo viene attualizzato al tasso privo di rischio. Ciò significa che la probabilità di insolvenza $Q(T)$ è una probabilità neutrale al rischio, diversa pertanto dalla probabilità reale $P(T)$.

Dato che il rendimento dello *zero-coupon bond* emesso dalla società è $y(T)$, si ha:

$$\$100 \times e^{-y(T)T} = \$100 \times [1 - Q(T)]e^{-y^*(T)T}. \quad \text{[D.2]}$$

23 Hull, J.C., (2000), *Opzioni, futures e altri derivati*, Prentice-Hall International.

Ne segue che

$$Q(T) = \frac{e^{-y^*(T)T} - e^{-y(T)T}}{e^{-y^*(T)T}}$$

ossia

$$Q(T) = 1 - e^{-[y(T)-y^*(T)]T} \quad [D.3]$$

La formula [D.3] ci restituisce pertanto i valori delle probabilità di insolvenza *risk-neutral* di un generico *zero-coupon bond*.

Vediamo ora di dimostrare che le probabilità di insolvenza calcolate su dati storici (probabilità reale P) sono significativamente più basse di quelle che si ottengono sulla base dell'analisi dei prezzi delle obbligazioni, per via del fatto che le probabilità estratte dai prezzi sono *risk-neutral* (probabilità Q).

Si considerino ad esempio le obbligazioni con *rating* iniziale A. Supponiamo che il *credit spread* dei *bonds* a 5 anni sia di 50 punti base e che il tasso di recupero sia nullo²⁴. La probabilità di insolvenza a 5 anni, calcolata in base all'equazione [D.3] è pari a

$$1 - e^{-0,005*5} = 0,0247$$

ossia al 2,47 per cento. La tavola delle probabilità di insolvenza ricavate dai dati storici (Standard & Poor's, gennaio 2001) mostra che per le obbligazioni con *rating* A la probabilità di insolvenza a 5 anni è pari allo 0,57 per cento. Quali sono le ragioni che possono spiegare le differenze tra le perdite per insolvenza calcolate in base ai prezzi delle obbligazioni e quelle osservate storicamente? Un'importante spiegazione teorica ha a che vedere con la differenza tra mondo neutrale al rischio e mondo reale²⁵.

Il valore delle probabilità ricavata dal prezzo delle obbligazioni è pari a oltre 4 volte lo 0,57 per cento che si ottiene sulla base dei dati storici. In realtà si può dimostrare che il 2,47 per cento è la stima della probabilità d'insolvenza in un mondo neutrale verso il rischio, mentre lo 0,57 per cento è la stima della probabilità di insolvenza nel mondo reale.

Per dimostrarlo si noti che, in base alla formule di *pricing* sopra illustrate, il prezzo dello *zero-coupon bond* è inferiore del 2,47 per cento rispetto al prezzo del corrispondente titolo privo di rischio. Per ottenere questa differenza abbiamo fatto le seguenti ipotesi (entrambe alla base dell'equazione D.1):

- i. il pagamento atteso a 5 anni sull'obbligazione è inferiore del 2,47 per cento rispetto a quello del corrispondente titolo privo di rischio;

24 Nell'equazione [D.3] il *credit spread* è pari a $y(T)-y^*(T)$.

25 Altman è stato uno dei primi studiosi ad esaminare le discrepanze nelle stime della probabilità di insolvenza ottenute sulla base dei prezzi dei *bonds* o sulla base dell'evidenza empirica sulle insolvenze. Dai suoi studi risulta che, anche se si tiene conto dell'impatto delle insolvenze, gli investitori possono attendersi rendimenti significativamente più elevati sugli investimenti in obbligazioni rispetto agli investimenti in titoli privi di rischio (*Measuring Corporate Bond Mortality and Performance*, Journal of Finance, n. 44, 1989).

ii. i tassi di attualizzazione dei due pagamenti sono gli stessi.

La seconda di queste assunzioni è corretta solo in un mondo neutrale verso il rischio, cioè in un mondo in cui il tasso di rendimento atteso da ogni investimento è pari al tasso privo di rischio. La prima assunzione implica una probabilità di insolvenza del 2,47 per cento. Possiamo quindi concludere che il prezzo del *corporate bond* è coerente con una probabilità di insolvenza del 2,47 per cento in un mondo neutrale verso il rischio²⁶.

Per ottenere la stessa differenza in un altro modo possiamo fare le seguenti ipotesi:

- i. il pagamento atteso a 5 anni sull'obbligazione *corporate* è inferiore dello 0,57 per cento rispetto a quello del corrispondente titolo privo di rischio (cioè utilizziamo le probabilità di insolvenza vere P);
- ii. il tasso di attualizzazione del pagamento promesso dal *corporate bond* è pari al tasso di interesse privo di rischio maggiorato dello 0,38 per cento.

Vediamo perché se inseriamo le probabilità vere P (pari allo 0,57 per cento) allora il tasso di attualizzazione non può essere quello privo di rischio se vogliamo rispettare la condizione che la differenza relativa di prezzo tra i due *bonds* sia pari a quella osservata (2,47 per cento). La correzione del tasso di attualizzazione per tener conto dell'avversione al rischio fa sì che il prezzo del *corporate bond* si riduca di circa l'1,9 per cento ($=5 \times 0,38$)²⁷. Se teniamo conto della riduzione di prezzo determinata dal minor pagamento atteso (0,57 per cento), si vede che la differenza relativa tra i prezzi dei due *zero-coupon bond* è di circa il 2,47 per cento ($=1,9+0,57$). La stessa differenza che effettivamente si osserva sul mercato.

Pertanto, se nel mondo reale il tasso appropriato per attualizzare i pagamenti del *corporate bond* è maggiore dello 0,38 per cento rispetto a quello da utilizzare in un mondo neutrale verso il rischio, la probabilità di insolvenza è pari – nel mondo reale – allo 0,57 per cento. Una maggiorazione del tasso di attualizzazione in misura pari allo 0,38 per cento – quando ci si muove dal mondo neutrale verso il rischio a quello reale – non sembra irragionevole.

Questo semplice esercizio mostra come, quando si valutano i derivati creditizi o si stima l'impatto del rischio di insolvenza sul valore dei derivati finanziari (finalità di *pricing*) si possono usare le probabilità neutrali al rischio dato che la valutazione viene effettuata in un ambiente neutrale verso il rischio. Viceversa, quando si effettuano le analisi degli scenari per il calcolo delle perdite potenziali si devono usare le probabilità del mondo reale. Sulla base del nostro esempio, un investitore che fondasse le proprie decisioni sulle probabilità *risk-neutral* utilizzate nel *pricing* ricaverebbe una stima aberrante della probabilità di insolvenza, come detto di 4 volte superiore a quella reale.

26 Si usa volutamente il termine "coerenza", in quanto è proprio il significato che hanno le probabilità degli scenari probabilistici, non indicando invece in nessun caso delle previsioni di eventi futuri (come erroneamente possono essere indotti a credere gli investitori).

27 In base all'equazione fondamentale della *duration* il tasso di variazione del prezzo di un titolo è uguale al prodotto tra la *duration* (D) e la variazione del tasso di rendimento (Δy): $\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y$.

I limiti informativi delle distribuzioni *risk-neutral* sono confermati anche da un ampio filone di letteratura che cerca appunto di correggere le distribuzioni *risk-neutral* per arrivare a stimare delle distribuzioni *real world*. In questo filone di letteratura si segue un processo inverso a quello illustrato nel par.2.1, per cui a partire dai prezzi di alcuni prodotti derivati, quali le opzioni, si estrae la distribuzione di probabilità *risk-neutral* del prezzo del sottostante. Ad esempio, Grundy (1991) sottolinea come la distribuzione di probabilità *risk-neutral* non coincida con quella *real world* e dal confronto fra le due distribuzioni ne deriva una stima dell'avversione al rischio degli investitori. In un lavoro più recente, ispirato allo stesso obiettivo, Bliss e Panigirtzoglou (2004) sono ancora più espliciti affermando che: "*Unfortunately, theory also tells us that the PDFs [probability distribution functions, ossia le distribuzioni di probabilità – N.d.R.] estimated from options prices are risk-neutral. If the representative investor who determines options prices is not risk-neutral, these PDFs need not correspond to the representative investor's (i.e., the market's) actual forecast of the future distribution of underlying asset values.*"

Nell'ambito di tale ampio filone di letteratura si pone in evidenza, quindi, la necessità di rappresentare le aspettative degli investitori correggendo le probabilità "neutrali al rischio", derivabili dai prezzi delle opzioni, in modo da ottenere delle distribuzioni di probabilità *real world* che dovrebbero fornire una rappresentazione maggiormente accurata delle aspettative di investitori avversi al rischio (fra i *paper* più recenti sul tema vi sono Liu *et al.*, 2007 e Humphreys e Noss, 2012).

Dovrebbe pertanto essere chiaro il *trade-off* di fondo tra misura di probabilità neutrale al rischio e probabilità reale. Le probabilità neutrali al rischio hanno il vantaggio di essere oggettive, nel senso che non tengono conto dell'avversione al rischio degli investitori che è incognita e varia da individuo a individuo, e pertanto possono essere tecnicamente trattate e utilizzate per il *pricing* dei derivati. Le probabilità reali – che tengono conto dell'avversione al rischio di ciascun individuo – sono le uniche che fornirebbero una misura attendibile della probabilità di guadagnare/perdere entro un determinato orizzonte temporale ma hanno il forte limite di essere non univoche, ovvero necessitano di alcune congetture sull'avversione al rischio degli individui e pertanto sono soggettive. L'esempio nel Box 6 chiarisce in termini formali, riprendendo il semplice esempio del Box 1 sul *pricing* di un derivato in un modello binomiale, in che modo l'avversione al rischio determini distribuzioni di probabilità *risk neutral* diverse da quelle reali.

Box 6 – La differenza fra distribuzioni *risk-neutral* e *real world* in un caso semplificato con 2 possibili "stati del mondo" e agenti avversi al rischio

Riprendiamo il modello del Box 1 dove il prezzo di un derivato Y dipende da un sottostante S che può assumere solo 2 valori in corrispondenza di 2 diversi "stati del mondo" a e b .

Analizziamo ora il valore che un agente rappresentativo avverso al rischio assegna al valore del sottostante S di un derivato, ad esempio un'azione, alla data della sua scadenza T . Egli massimizza l'utilità della sua ricchezza finale $U(S)$ al tempo T ; si ipotizza, come avviene usualmente, che l'utilità sia una funzione concava. La ricchezza viene misurata in funzione dell'andamento di S , che possiamo considerare come un indice azionario e che costituisce dunque una buona *proxy* della ricchezza. In particolare, l'agente rappresentativo massimizza la ricchezza attesa in base alle probabilità "vere" p e $1-p$ associate ai 2 stati del mondo, cioè:

$$\max p U(S_a) + (1 - p)U(S_b). \quad [\text{E.1}]$$

Questo processo di massimizzazione deve però tenere conto del vincolo che, per l'argomento di non arbitraggio discusso nel Box 1, il prezzo S del sottostante alla data futura T , cioè il prezzo del contratto derivato *forward* sull'azione sottostante, deve essere pari al prezzo *risk-neutral*, ossia $(qS_a + (1 - q)S_b)$. Il prezzo corrente dell'azione (il prezzo in $t=0$), ossia la ricchezza iniziale dell'agente, deve quindi essere necessariamente pari al valore scontato atteso dei *payoff* del contratto *forward* in T pesati per le probabilità *risk neutral*, ossia, come visto nel Box 1:

$$e^{-rt}(qS_a + (1 - q)S_b) = S_0 \quad [\text{E.2}]$$

Risolviamo il problema di massimizzazione vincolata impostando dunque la funzione *lagrangiana* e risolvendo le condizioni di prim'ordine, come segue:

$$L = pU(S_a) + (1 - p)U(S_b) - \lambda(e^{-rt}(qS_a + (1 - q)S_b) - S_0)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial S_a} = \frac{p\partial U(S_a)}{\partial S_a} - \lambda q e^{-rt} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial S_b} = \frac{(1-p)\partial U(S_b)}{\partial S_b} - \lambda(1 - q)e^{-rt} = 0 \end{cases}$$

dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$p = \frac{\frac{\partial U(S_b)}{\partial S_b}}{\frac{\partial U(S_a)}{\partial S_a} \left(\frac{1-q}{q}\right) + \frac{\partial U(S_b)}{\partial S_b}}$$

Si nota che per spiegare la differenza tra probabilità "vere", che indichiamo con p , e probabilità *risk-neutral*, che indichiamo con q , è necessario specificare una funzione di utilità che interpreti le preferenze degli agenti economici. È possibile dimostrare che, utilizzando una funzione d'utilità neutrale al rischio, come potrebbe essere una funzione lineare, probabilità "vere" e *risk-neutral* coincidono. Ad esempio:

$$U(S) = \alpha(S_a + S_b)$$

$$p = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{q} - \alpha + \alpha} = q$$

È possibile altresì dimostrare, sempre nella cornice dell'esempio semplificato proposto, che funzioni d'utilità che implicano avversione al rischio, come potrebbe essere una funzione logaritmica, determinano probabilità "vere" diverse dalle probabilità *risk-neutral*. Infatti:

$$U(S) = \ln S_a + \ln S_b$$

$$p = \frac{S_a}{\frac{S_b}{q} - S_b + S_a}$$

Se poniamo $\frac{S_a}{S_b} = w$, possiamo scrivere:

$$p = \frac{w}{\frac{1}{q} - 1 + w} = q \frac{w}{1 - q + wq} \quad [E.3]$$

Questa espressione per p determina valori tendenzialmente nulli per $q=0$, valori pari a uno per $q=1$, e valori di p sempre superiori ai valori di q per $0 < q < 1$.

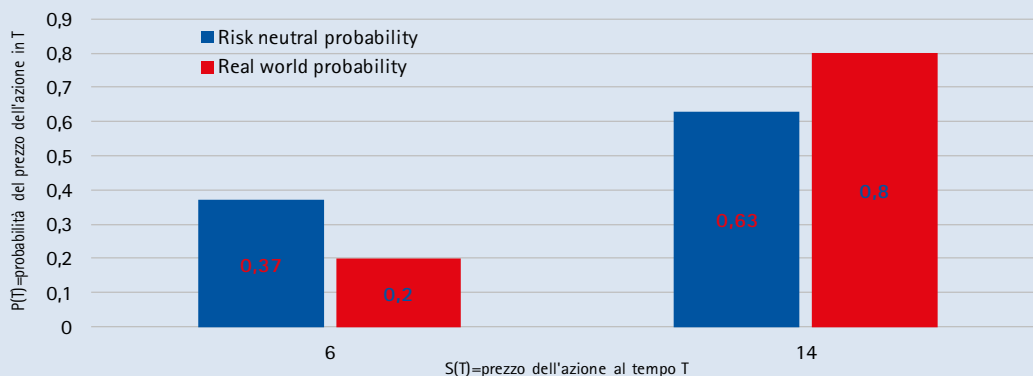
Sfruttando la formula [E.3] – che lega le probabilità reali p alle "pseudo-probabilità" q – è possibile valutare quanto possano essere diverse p e q quando gli agenti sono avversi al rischio, utilizzando il caso del *pricing* di una semplice opzione *call* come nell'esempio del Box 1.

Nel Box 1 avevamo determinato il prezzo di un'opzione *call* facendo l'ipotesi di un modello binomiale ad un periodo e applicando i principi del *pricing* di non arbitraggio (ovvero di neutralità al rischio). Avevamo pertanto ottenuto sia il prezzo teorico della *call* (pari a \$2,29, equazione A.10) sia le probabilità *risk-neutral* pari a $q=0,63$ e $1-q=0,37$ (equazione A.6 bis).

A questo punto, rimuovendo l'ipotesi di neutralità al rischio, e quindi ipotizzando che l'agente rappresentativo abbia una funzione di utilità logaritmica avversa al rischio, possiamo agevolmente passare dalle probabilità *neutrali al rischio* a quelle *reali*. Ricorrendo alla formula [E.3] si ha che, nel caso di un agente avverso al rischio, con probabilità *risk-neutral* $q=0,63$ e processo di prezzo del sottostante descritto dal modello binomiale $S_u=14$ e $S_d=6$ (cioè esattamente il caso descritto nel Box 1), si ottengono le probabilità "vere" pari a $p=0,80$ e $1-p=0,20$. La distorsione nell'estrazione delle probabilità sotto l'ipotesi di neutralità al rischio è pertanto molto significativa e viene rappresentata graficamente nella Figura 1.

Considerata la significatività della differenza tra le due misure di probabilità si comprende come l'utilizzo delle probabilità *risk-neutral* quale stima dei possibili scenari futuri di prezzo di un prodotto finanziario derivato sono potenzialmente in grado di fornire indicazioni fuorvianti ai risparmiatori che non siano in grado di comprendere le sottili differenze teoriche tra le due misure di probabilità e dunque la loro effettiva portata informativa.

Figura 1 – Probabilità reali e probabilità *risk-neutral* in 2 diversi "stati del mondo" ipotizzando un agente avverso al rischio con una funzione di utilità logaritmica



3 L'approccio *risk-neutral* per il *pricing* di strumenti derivati collegati ai tassi d'interesse (IRS)

3.1 Aspetti generali della valutazione dei contratti IRS

Le considerazioni teoriche illustrate nel par. 2.1 per il *pricing* dei derivati azionari in un ambiente *risk-neutral* valgono in linea generale anche per i derivati leganti all'andamento dei tassi d'interesse, anche se vi sono rilevanti differenze sia sul piano economico sia sul piano tecnico.

Per ciò che riguarda il profilo economico, mentre il *pricing* dei derivati azionari è un *pricing* cosiddetto "subordinato", nel senso che dipende solo dalla dinamica del sottostante, nel caso dei tassi d'interesse è necessario definire la dinamica del tasso *spot* e quindi modellizzare la dinamica dell'intera curva dei tassi; ciò implica avere un "modello di mercato" per la curva dei tassi che poi consente il *pricing* di qualsiasi derivato legato ai tassi d'interesse (cfr. Box 7).

Box 7

I contratti *interest rate sensitive* (IRS)

Un titolo, o contratto, *interest rate sensitive* (IRS), nominale, è un contratto finanziario il cui prezzo può essere espresso come una funzione dei tassi di interesse (nominali) di mercato; data questa dipendenza funzionale, i contratti IRS possono essere anche qualificati come "derivati su tassi di interesse" (*interest rate derivatives*). L'esempio più semplice di titolo IRS è il prezzo $v(t, T)$ degli ZCB unitari. Un modello per titoli IRS che non assuma questi prezzi come dati esogenamente, ma che ne fornisca il valore sulla base di un numero limitato di variabili esplicative fondamentali svolge anche il ruolo di "modello per la struttura per scadenza dei tassi di interesse" (*term structure model*).

Un modello di *pricing* per titolo IRS ha l'obiettivo di spiegare i prezzi osservati sul mercato e di assegnare, in modo coerente coi prezzi osservati, il prezzo di contratti non ancora quotati. Diversamente dai modelli di *pricing* "subordinato", com'è quello di Black e Scholes, un *term structure model* non si limita a fornire il prezzo di un *asset* (il derivato) dato il prezzo di un altro *asset* (il sottostante), ma ha l'obiettivo di costruire un criterio di valutazione coerente per un'intera classe di titoli – i titoli obbligazionari e i derivati di tipo obbligazionario – in dipendenza dal valore di una o più variabili base – i tassi di interesse relativi a scadenza diverse. Un modello per titoli IRS, quindi, assume il ruolo di un vero e proprio modello di mercato e in generale richiederà anche ipotesi sulle preferenze degli agenti economici.

Il tipo di incertezza che caratterizza il prezzo di un titolo obbligazionario ha una struttura più complessa di quella tipica dei titoli non obbligazionari. Il prezzo $v(t, T)$ di uno ZCB unitario è imprevedibile per $t < T$ ma deve essere uguale a 1 con certezza alla scadenza T ; la variabilità di v in funzione di t , quindi, dovrebbe essere tipicamente decrescente al passare del tempo, fino ad annullarsi per $t = T$.

Una volta specificato l'intervallo di tempo elementare – di lunghezza Δt finita nei modelli discreti, infinitesima nei modelli continui – il tasso di interesse di mercato da t a $t+\Delta t$ è noto in t , l'incertezza riguarda i tassi di interessi futuri, cioè fissati dal mercato in $t+\Delta t$ e negli istanti successivi. È quindi evidente che un modello stocastico per i tassi di interesse dovrà essere strutturalmente intertemporale e non saranno adeguati approcci di tipo uniperiodale, com'è, per esempio, il CAPM per i titoli azionari.

Nel caso dei tassi d'interesse, a differenza di quanto avviene nel mondo azionario, è necessario modellare esplicitamente il comportamento degli operatori e le loro preferenze verso il rischio. In particolare, data una certa ipotesi sull'equazione stocastica che governa il cosiddetto tasso d'interesse istantaneo o *spot rate* (cfr. Box 8), l'applicazione dell'ipotesi di *hedging* per la valutazione di un derivato simile a quella usata nel modello di Black e Scholes richiede comunque la formulazione di un'ipotesi sulla struttura dei premi al rischio degli operatori. Dal punto di vista economico, ciò dipende dal fatto che l'*hedging* avviene fra due contratti IRS con prezzi diversi per i quali non è osservabile un prezzo di mercato alla data corrente (mentre nel mondo azionario è sempre osservabile il valore di mercato del prezzo dell'azione sottostante) e dal fatto che entrambi i contratti dipendono dallo *spot rate* che non è uno strumento quotato per il quale è osservabile il prezzo di mercato. In questo caso, l'ipotesi di mercati completi consente comunque, come nel caso dei derivati azionari, di determinare un prezzo del derivato "ad oggi" univoco perché espressione di una relazione di non-arbitraggio; tuttavia, a differenza di quanto avviene nel mondo dei derivati azionari, l'ipotesi di premio al rischio pari a zero per stimare il valore futuro di un derivato equivale a formulare un'ipotesi economica esplicita sul comportamento degli operatori, ossia l'ipotesi di aspettative "pure" o "non distorte" per cui i tassi a termine impliciti nella struttura dei tassi corrente sono in media previsori non distorti dei tassi futuri. Naturalmente, si tratta di un'ipotesi arbitraria o comunque in competizione con altre ipotesi che forse meglio riescono a spiegare la struttura dei tassi, quali l'ipotesi del premio per la liquidità, quella dei mercati segmentati o quella dell'*habitat* preferito (cfr. Box 9). Ipotesi diverse dal premio al rischio pari a zero possono essere infatti coerenti con le citate ipotesi alternative sulla dinamica della struttura dei tassi²⁸.

Alcuni studi empirici "classici" sul mercato americano, in particolare Fama e Bliss (1987), Campbell e Shiller (1991) e Cochrane e Piazzesi (2005), hanno ampiamente rigettato l'ipotesi delle aspettative pure o non distorte. Questi studi mostrano che i tassi *forward* non sono predittori accurati dei tassi futuri (ovvero che i tassi a lungo termine attuali non sono una media dei futuri tassi attesi a breve) e che quindi esiste un premio al rischio diverso da zero nella curva dei tassi.

28 Cfr., Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Mottura C. (1993), "Un corso sul controllo del rischio di tasso d'interesse", Il Mulino.

Un altro importante limite applicativo dei modelli di stima dei contratti *IRS* (uno dei principali è il cosiddetto modello "*CIR*" e verrà illustrato nel paragrafo 3.2) è costituito dalla instabilità della stima dei parametri del modello al momento della sua implementazione con dati reali e cioè dipende generalmente dai seguenti motivi (Gourieroux e Monfort, 2007; Brandt and Chapman, 2002; Cheng Yong Tang e Song Xi Chen, 2009):

- i.* Errata specificazione del modello: le diverse tecniche enometriche impiegate per la stima dei parametri del modello possono fornire stime non robuste e quindi non accurate se il modello non è correttamente specificato;
- ii.* Poiché il tasso istantaneo di interesse è una variabile inosservabile (artificiale) il modello può essere stimato ricorrendo a diverse *proxy* (tasso interesse a un mese o tre mesi): i risultati delle stime dei coefficienti del modello possono dipendere dal tipo di *proxy* utilizzate fornendo pertanto valori teorici non univoci;
- iii.* Rischio stimatore: anche assumendo la correttezza del modello, i valori dei parametri stimati possono cambiare, anche sensibilmente, a seconda dell'approccio econometrico prescelto.

Box 8

I modelli univariati nel tempo continuo

Al tempo t , si indichi con $Y(t)$ il prezzo di un generico titolo *IRS*. Il problema della valutazione dei contratti *IRS* può essere efficacemente affrontato costruendo un modello stocastico di mercato definito nel tempo continuo e in cui il rischio di tasso sia caratterizzato da un'unica fonte di incertezza. Dato che il periodo di investimento elementare ha lunghezza infinitesima dt , è spontaneo adottare come variabile del modello il tasso istantaneo $r(t)$, lo *spot rate*²⁹.

In condizioni di incertezza, i valori assunti dalla funzione $r(t)$ sono variabili aleatorie; in altri termini, il tasso locale di interesse costituisce un processo stocastico $r(t)$ che si assume definito per ogni t . In questo senso se $r(t)$ è l'unica variabile di base, si dice pure che è l'unica "fonte di incertezza" che caratterizza la struttura del mercato.

Come ulteriore caratteristica del mercato si assuma che gli agenti economici abbiano "opinioni conformi" ("*homogeneous expectations*") sulla variabile base, ci sia cioè accordo sulle distribuzioni di probabilità (la cosiddetta "legge temporale" di r).

Il modello di mercato adottato per il *pricing* assume che l'intensità istantanea di interesse dei titoli con vita a scadenza infinitesimale, lo *spot rate* $r(t)$, sia un processo di diffusione (processo di Markov), descritto dall'equazione differenziale stocastica³⁰:

29 Come nel modello di Black e Scholes l'incertezza sarà "di tipo diffusivo", la dinamica della variabile $r(t)$ sarà rappresentata cioè come un processo di diffusione.

30 Supporre che $r(t)$ sia un processo di Markov equivale a dire che la distribuzione di probabilità dei valori futuri di $r(t)$ sia determinata unicamente in base al valore che il processo assume nell'istante corrente e non dipende invece dall'intera «storia» del processo.

$$dr(t) = f(r_t, t)dt + g(r_t, t)dZ(t)$$

dove il coefficiente di *drift* (*media infinitesima*) $f(r_t, t)$ e il coefficiente di diffusione $g^2(r_t, t)$ sono funzioni opportunamente specificate. Le funzioni f e g^2 rappresentano quindi la media e la varianza (per unità di tempo) degli incrementi che il processo $r(t)$ subisce in intervalli di tempo infinitesimi. $Z(t)$ è un processo di Wiener con varianza istantanea unitaria (moto *browniano standard*).

In questo modello pertanto l'unica fonte di incertezza che influisce sul prezzo $Y(t)$ di un qualsiasi titolo IRS è descritta dal processo del tasso istantaneo $r(t)$ che, per la proprietà di markovianità, costituisce la variabile di stato del sistema. Quindi il prezzo $Y(t)$ del derivato sarà, in generale, funzione di r e di t :

$$Y(t) = Y(r_t, t)$$

e costituirà un processo stocastico descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dY(t) = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dZ(t).$$

Possiamo riscrivere l'equazione differenziale stocastica del titolo IRS nella forma:

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = a'(r_t, t)dt + b'(r_t, t)dZ(t) \quad [F.1]$$

dove i coefficienti "percentualizzati" sono uguali a:

$$a'(r_t, t) = \frac{a(r_t, t)}{Y(t)}, \quad b'(r_t, t) = \frac{b(r_t, t)}{Y(t)}.$$

Prendendo l'aspettativa dell'equazione [F.1] si ha:

$$\mathbf{E}_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right] = a'(r_t, t)dt$$

da cui:

$$a'(r_t, t) = \frac{\mathbf{E}_t[dY(t)/Y(t)]}{dt},$$

per la varianza si ottiene:

$$\mathbf{Var}_t \left[\frac{dY(t)}{Y(t)} \right] = b'^2(r_t, t)\mathbf{Var}_t[dZ(t)] = b'^2(r_t, t)dt$$

cioè:

$$b'^2(r_t, t) = \frac{\mathbf{Var}_t[dY(t)/Y(t)]}{dt}.$$

Quindi, a' e b' rappresentano il valore atteso e la deviazione *standard* del tasso istantaneo di rendimento ottenuto investendo nel derivato. In generale,

Si può pertanto definire un prezzo del rischio per il contratto IRS, ponendo:

$$\pi_Y = \frac{a' - r}{b'}.$$

L'argomentazione di *hedging*

Anche per i contratti IRS si può ricavare una relazione tra i prezzi imposta dal principio di arbitraggio. Dal punto di vista matematico, l'argomentazione di *hedging* ha una struttura analoga a quella utilizzata nel modello di Black e Scholes, ma per ottenere un'equazione di valutazione è necessario in questo caso l'introduzione di ipotesi accessorie sulla struttura dei premi al rischio.

Si costruisca un portafoglio composto da una unità di un contratto IRS con prezzo $Y_1(t)$ e da α unità di un contratto IRS con prezzo $Y_2(t)$. Il valore $W(t)$ di questo portafoglio al tempo t è dato da:

$$W(t) = Y_1(t) + \alpha Y_2(t)$$

e la sua dinamica³¹ sarà descritta dalla equazione differenziale stocastica:

$$dW = (a_1 + \alpha a_2)dt + (b_1 + \alpha b_2)dZ$$

dove le funzioni $a_k(r_t, t)$ e $b_k(r_t, t)$ (per $k = 1, 2$) rappresentano i coefficienti dell'equazione differenziale stocastica di Y_k .

Per la quota:

$$\alpha^* = -\frac{b_1}{b_2}$$

il portafoglio ha valore:

$$W^* = Y_1 + \alpha^* Y_2,$$

e dinamica descritta dalla:

$$dW^* = (a_1 + \alpha^* a_2)dt. \quad [F.2]$$

Il portafoglio risulta pertanto istantaneamente non-rischioso, nel senso che il valore di $W^*(t + dt)$ è perfettamente prevedibile in t .

Per evitare arbitraggi privi di rischio, l'incremento di valore $dW^*(t)$ ottenuto detenendo questo *hedged* portafoglio da t a $t+dt$ dovrà coincidere con l'incremento di valore (interesse) ottenuto investendo l'importo $W^*(t)$ da t a $t+dt$ al "tasso" non-rischioso $r(t)$. Dovrà cioè essere:

$$dW^*(t) = W^*(t)r(t)dt. \quad [F.3]$$

Dalle equazioni [F.2] e [F.3], e dopo alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene:

$$\frac{a_1' - r}{b_1'} = \frac{a_2' - r}{b_2'}. \quad [F.4]$$

Dato che i contratti IRS Y_1 e Y_2 sono stati scelti arbitrariamente, l'equazione [F.4] afferma che, per evitare arbitraggi, il rapporto $(a_k' - r)/b_k'$ deve essere lo stesso per tutti i titoli IRS quotati sul mercato. In altri termini la funzione:

$$q(r_t, t) = \frac{a'(r_t, t) - r(t)}{b'(r_t, t)} \quad [F.5]$$

31 Per semplicità si fa riferimento a titoli che non pagano dividendo.

definisce una quantità caratteristica del mercato. Con riferimento a un generico IRS, il numeratore $L' = a' - r$ della funzione q esprime la differenza di rendimento atteso tra l'investimento nel contratto IRS e l'investimento al "tasso di mercato", rappresenta il compenso richiesto per accettare il rischio indotto da variazioni non-anticipate del tasso locale ("premio al rischio", premio di liquidità o *term premium*). Poiché il denominatore b' – come si è detto – esprime la deviazione *standard* del rendimento istantaneo fornito dal contratto IRS, la funzione q rappresenta la differenza di rendimento atteso per unità di rischio; è cioè interpretabile come il *prezzo di mercato del rischio*. Essendo indipendente dal particolare contratto considerato, q è funzione solamente dello *spot rate* $r(t)$ e di t .

La quantità $a'(r_t, t)$ esprime il rendimento istantaneo atteso di una strategia di detenzione ("passiva"), consistente nell'acquistare il contratto IRS in t e nel detenerlo fino a $t+dt$; la quantità $r(t)$, invece, esprime il rendimento di una strategia "attiva", nella quale l'importo $Y(t)$ viene investito sul mercato da t a $t+dt$. Su periodi infinitesimali la strategia di gestione attiva è non-rischiosa nel senso che garantisce il *risk-free rate* $r(t)$, mentre la strategia di detenzione ha rendimento aleatorio; su periodi finiti la strategia attiva ha un rendimento periodale aleatorio, dipendente dalla traiettoria del processo $r(t)$, mentre la detenzione garantisce a scadenza un rendimento periodale certo (contrattuale). Non esiste quindi in questo caso una relazione di dominanza tra il rendimento atteso $a'(r_t, t)$ e il rendimento istantaneamente non-rischioso $r(t)$; nella valutazione del rischio entrano in gioco le preferenze degli investitori sull'allocazione temporale delle risorse finanziarie.

L'equazione di valutazione

Dato che il processo $r(t)$ non rappresenta il prezzo di una attività quotata, l'espressione del prezzo di mercato del rischio non può essere ricavata direttamente dall'osservazione del mercato. In altri termini, la funzione $q(r_t, t)$ rappresenta una quantità esogena al modello di valutazione, che va specificata sulla base di ipotesi aggiuntive sulle preferenze degli investitori.

Una volta specificata la forma di q , l'equazione [F.5] fornisce un risultato operativo di grande importanza. Riscrivendo la [F.5] nella forma:

$$a - qb = rY$$

e utilizzando le espressioni esplicite di a e b , si ha:

$$\frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + (f - qg) \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY. \quad [F.6]$$

La [F.6] è definita come l'equazione generale di valutazione per i titoli IRS che non pagano dividendi, caratteristica del modello. Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali di secondo ordine deterministica, che deve essere soddisfatta dal prezzo $Y(t)$ di qualsiasi contratto IRS in ogni istante t .

L'equazione di valutazione va risolta sotto le condizioni al contorno che caratterizzano la struttura del titolo da valutare. Il caso più semplice, cui conviene fare normalmente riferimento, è quello di un titolo IRS definito da un *payoff* a scadenza; in questo caso il contratto produce alla scadenza $T \geq t$

un *payoff* formalizzato dalla:

$$Y(T) = F(r_T) \quad [\text{F.7}]$$

definito come una funzione F prefissata del valore assunto dallo *spot rate* in T .

Il prezzo:

$$Y(t) = V[t; F(r_T)]$$

di questo titolo si ricaverà come soluzione dell'equazione generale di valutazione [F.6] corredata con la condizione a scadenza [F.7]³².

Soluzione in forma integrale e proprietà di martingala

Con riferimento a un titolo IRS con *payoff* a scadenza $Y(T)$ e che non paga dividendi, si può dimostrare che la soluzione dell'equazione di valutazione [F.6] con condizione a scadenza [F.7] ha la seguente rappresentazione in forma integrale:

$$Y(t) = V[t; Y(T)] = \mathbf{E}_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(u) du} Y(T) \right] \quad [\text{F.8}]$$

dove \mathbf{E}_t^Q rappresenta l'operatore di media condizionata (al valore di r osservato in t) calcolata secondo una distribuzione di probabilità caratterizzata dal *drift*:

$$\hat{f}(r_t, t) = f(r_t, t) - q(r_t, t)g(r_t, t)$$

e dal coefficiente di diffusione $g^2(r_t, t)$. Anche in questo contesto, la distribuzione di probabilità individuata dai parametri \hat{f} e g ha il significato di distribuzione aggiustata per il rischio (*risk-adjusted drift*).

Tale distribuzione fa sì che il rendimento atteso dell'investimento in un qualsiasi titolo IRS per il periodo $[t, t+dt]$ coincide col rendimento istantaneo non-rischioso; cioè

$$\frac{\mathbf{E}_t^Q[dY(t)]}{Y(t)dt} = r(t)$$

che esprime il prezzo $Y(t)$ come l'aspettativa *risk-neutral* del *payoff* a scadenza scontato³³.

Se si definisce il fattore di sconto stocastico da t a T :

$$\varphi(t, T) = e^{-\int_t^T r(u) du}$$

- 32 Un esempio immediato si ottiene scegliendo F come la funzione costante uguale a 1. In questo caso si può scrivere infatti $Y(t) = v(t, T)$; il contratto IRS coincide con lo ZCB deterministico unitario con scadenza in T . Risulta quindi evidente in che senso il modello di valutazione produce endogenamente la curva dei rendimenti: risolvendo l'equazione generale di valutazione [F.6] sotto la condizione $Y(T)=1$ si ottiene, al variare di $T \geq t$, la struttura per scadenze dei prezzi $v(t, T)$ in vigore in t sul mercato e, di conseguenza, la struttura per scadenze dei tassi a pronti $i(t, T)$.
- 33 È evidente però che, in presenza di rischio di tasso, il fattore di sconto invece di essere deterministico è anch'esso una variabile aleatoria e compare quindi all'interno dell'operatore di aspettativa.

il prezzo del contratto *IRS* si può esprimere nella forma:

$$Y(t) = \mathbf{E}_t^Q[\varphi(t, T)Y(T)].$$

Nel caso di $Y(T)=1$ si ottiene l'espressione in termini di aspettativa del fattore di sconto di mercato in t per la scadenza T :

$$v(t, T) = \mathbf{E}_t^Q[\varphi(t, T)] = \mathbf{E}_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(u)du} \right].$$

Si può dimostrare che assumendo le ipotesi di mercati completi è sempre possibile costruire una strategia di investimento dinamica che replica con certezza il *payoff* del contratto *IRS*. In queste condizioni la distribuzione di probabilità *risk-neutral* Q specificata nella [F.8] è unica e corrisponde ad una fondamentale proprietà di martingala.

Per dimostrare le proprietà di martingala equivalente si consideri un contratto *IRS* stipulato al tempo zero, senza dividendi, con scadenza T e condizione a scadenza $Y(T) = F(r_T, T)$. Per $t \in [0, T]$ si definisca il processo del prezzo scontato:

$$Y^*(t) = \varphi(0, t)Y(r_t, t).$$

Sotto le ipotesi adottate, l'esclusione di arbitraggi implica che il processo $Y^*(t)$ è una martingala rispetto alla misura di probabilità *risk-neutral* Q ; deve cioè aversi:

$$\mathbf{E}_t^Q[\varphi(0, s)Y(r_s, s)] = \varphi(0, t)Y(r_t, t),$$

si ricava infatti:

$$Y(r_t, t) = \mathbf{E}_t^Q \left[\frac{\varphi(0, s)}{\varphi(0, t)} Y(r_s, s) \right] = \mathbf{E}_t^Q \left[e^{-\int_t^s r(u)du} Y(r_s, s) \right].$$

Relazione con le ipotesi di aspettativa

La forma della funzione $q(r_t, t)$ corrisponde alla particolare ipotesi di aspettativa adottata. In particolare, la scelta:

$$q(r_t, t) = 0,$$

equivale ad accettare la teoria delle aspettative in forma pura (*pure expectation hypothesis*), secondo la quale i tassi di interesse a termine $i(t, T, s)$ osservati in t forniscono un'aspettativa "non distorta" dei tassi a pronti futuri $i(T, s)$; secondo questa ipotesi i premi al rischio richiesti dagli agenti per i prestiti di diversa scadenza (i premi/sconto per la scadenza o *term premium*) sono nulli. È anche utile osservare che nel caso di funzione q identicamente nulla si ha:

$$\hat{f}(r_t, t) = f(r_t, t)$$

per cui la misura *risk-neutral* coincide con la probabilità naturale. Si ha quindi in questo caso:

$$Y(t) = \mathbf{E}_t \left[e^{-\int_t^T r(u)du} Y(T) \right] \quad \text{[F.9]}$$

3.2 Il modello CIR

Per ciò che riguarda i profili tecnici, i modelli stocastici utilizzati per descrivere la dinamica dei tassi d'interesse sono ovviamente diversi da quelli usati per i prezzi azionari. Ad esempio, uno dei modelli stocastici più noti per descrivere la dinamica dei tassi d'interesse è quello cosiddetto "CIR", sviluppato da Cox, Ingersoll e Ross (1985).

Affinché l'equazione di valutazione [F.6 nel Box 8) possa essere utilizzata quale strumento operativo per la valutazione dei contratti IRS, è necessario specificare la forma delle funzioni f e g , che determinano la dinamica dello *spot rate* e della funzione q , che caratterizza la forma dei premi per scadenza³⁴.

Nel modello CIR si assume per la componente deterministica di $r(t)$ una dinamica di tipo *mean-reverting*, specificata dalla funzione di *drift*:

$$f(r_t, t) = \alpha(\gamma - r_t) \quad \alpha, \gamma > 0; \quad (3)$$

questa scelta implica per la componente deterministica dei movimenti di $r(t)$ una traiettoria esponenziale di avvicinamento al livello γ , che è il valore "a lungo termine" del tasso istantaneo³⁵.

La componente stocastica del processo di tasso ha la forma:

$$g(r_t, t) = \rho\sqrt{r_t} \quad \text{con } \rho > 0. \quad (4)$$

Questa scelta per il coefficiente di diffusione caratterizza un termine di disturbo di entità tanto più grande quanto più elevato è il livello di $r(t)$, in accordo con l'evidenza empirica che tendenzialmente associa maggior volatilità a periodi di levati tassi di interesse.

Dalle equazioni (3) e (4) si ottiene l'equazione differenziale stocastica *mean-reverting square-root*:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho\sqrt{r_t}dZ_t. \quad (5)$$

Sulla base delle stesse dimostrazioni matematiche prima illustrate per i modelli sui prezzi azionari, è possibile mostrare che, anche in questo caso, per finalità di *pricing*, è possibile utilizzare un'equazione che non include esplicitamente la componente soggettiva del premio al rischio (*parametrizzazione aggiustata per il rischio*).

La funzione q , che esprime il prezzo di mercato del rischio, ha la forma:

$$q(r_t, t) = -\pi \frac{\sqrt{r_t}}{\rho} \quad (6)$$

essendo il parametro π un numero reale di segno arbitrario. Con questa scelta per le funzioni di f , g e q , il *drift* aggiustato per il rischio risulta essere:

34 La forma funzionale di q nel modello CIR è stata giustificata nell'ambito di un più generale modello di equilibrio economico.

35 La velocità di avvicinamento è misurata dal parametro α .

$$\hat{f} = f - qg = \alpha(\gamma - r_t) + \pi r_t. \quad (7)$$

Se si definiscono i nuovi parametri:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \pi, \quad \hat{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \quad (8)$$

la (7) può anche esprimersi nella forma:

$$\hat{f} = \hat{\alpha}(\hat{\gamma} - r_t)$$

si può cioè rappresentare la dinamica *risk-adjusted* come un processo *mean-reverting*, avendo però opportunamente corretto (con il parametro π di premio al rischio) i coefficienti α e γ del processo naturale dello *spot rate*.

Con le specificazioni (3) (4) e (6) si ottiene l'equazione generale di valutazione del modello *CIR* per i titoli che non pagano dividendi:

$$\frac{1}{2}\rho^2 r \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + [\alpha(\gamma - r) + \pi r] \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial t} = rY. \quad (9)$$

Imponendo la condizione a scadenza $Y(t + \tau) = 1$, specifica dei titoli *IRS* che assumono con certezza valore 1 al tempo $t + \tau$, la (9) individua il prezzo in t degli *ZCB* unitari con vita a scadenza τ , cioè il fattore di sconto di mercato per la scadenza $t + \tau$. Si ricava l'espressione in forma chiusa:

$$v(t, t + \tau) = A(\tau)e^{-r(t)B(\tau)} \quad (10)$$

dove A e B sono funzioni deterministiche che dipendono solamente dalla vita a scadenza del titolo. Dall'espressione di v è immediato ottenere il tasso di interesse corrispondente che, come funzione di τ , fissato t , fornisce la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore sul mercato al tempo t .

L'espressione esplicita del fattore di sconto (10) ha una rilevante importanza nelle applicazioni pratiche del modello *CIR*. L'espressione per A e B ricavata da Cox, Ingersoll e Ross ha la forma:

$$A(\tau) = \left[\frac{2de^{(\alpha - \pi + d)\tau/2}}{(\alpha - \pi + d)(e^{d\tau} - 1) + 2d} \right]^v \quad (11)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{d\tau} - 1)}{(\alpha - \pi + d)(e^{d\tau} - 1) + 2d} \quad (12)$$

essendo:

$$d = \sqrt{(\alpha - \pi)^2 + 2\rho^2} \quad (13)$$

e:

$$v = 2 \frac{\alpha\gamma}{\rho^2} \quad (14)$$

L'espressione esplicita del prezzo $v(t, t + \tau)$ specificata dalle equazioni (11)-(14) contiene tutti e quattro i parametri α, γ, ρ e π caratteristici del modello; questi parametri non compaiono mai separatamente, ma sono aggregati nella forma $\alpha - \pi$ e $\alpha\gamma$. Ciò corrisponde al fatto che il prezzo dello *ZCB* unitario – ma ciò è vero in generale per qualsiasi contratto *IRS* prodotto dal modello – è determinato dalla distribuzione di probabilità *risk-adjusted*.

Ai fini della valutazione non è quindi necessario specificare separatamente la distribuzione naturale dello *spot rate* (cioè il valore di tutti e tre i parametri α , γ e ρ) e la funzione di premio al rischio (cioè il parametro π). Come evidenziato dalla equazione generale di valutazione del modello *CIR* (cfr. equazione 9), solo il parametro di volatilità ρ del processo naturale dello *spot rate* gioca un ruolo autonomo nella procedura di valutazione. Per quanto riguarda gli altri parametri caratteristici del modello, l'equazione (8) che specifica la forma del *drift* del processo *risk-adjusted* indica che non è necessaria una "parametrizzazione estesa", ma è sufficiente conoscere la differenza $\alpha - \gamma$ e il prodotto $\alpha\gamma$, anziché i valori separati di α , γ e π .

Sulla base di queste considerazioni è possibile riformulare le equazioni (11) e (12) utilizzando i parametri $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ definiti dall'equazione (8) e ottenere quella che viene chiamata "*parametrizzazione aggiustata per il rischio*":

$$A(\tau) = \left[\frac{2de^{(\hat{\alpha}+d)\tau/2}}{(\hat{\alpha} + d)(e^{d\tau} - 1) + 2d} \right]^v$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{d\tau} - 1)}{(\hat{\alpha} + d)(e^{d\tau} - 1) + 2d}$$

dove i parametri d e v sono sempre dati dalle equazioni (13) e (14).

A questo punto è di fondamentale importanza chiarire che i parametri disaggregati α , γ e π non risultano identificati dai valori di $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$: ciò dipende dal fatto che i prezzi di arbitraggio non sono determinati dalle probabilità naturali, ma dalle probabilità "distorte dalle preferenze"³⁶.

Per l'utilizzazione pratica del modello è necessario assegnare ai parametri dei valori numerici che siano in qualche modo rappresentativi della situazione del mercato che si vuole descrivere. Una procedura di stima dell'intero set di parametri α , γ , ρ e π può essere strutturata in due fasi distinte ("stima a due stadi"):

- stima su serie storica: si ricavano i parametri α , γ e ρ , caratteristici della dinamica dello *spot rate*, da informazioni sull'andamento storico di un tasso a breve termine che possa essere considerato una approssimazione del tasso istantaneo $r(t)$;
- stima su *cross section*: si ricava il parametro π espressivo dei *term premia*, integrando l'informazione sul tasso a breve con informazioni sui rendimenti osservati a una stessa data su scadenze diverse.

A questo punto è possibile tracciare alcune conclusioni di valenza generale sugli ambiti di applicazione (e i limiti informativi) dei modelli di *pricing* di strumenti finanziari derivati aventi come sottostanti tassi di interesse:

- *pricing*: se il modello *CIR* è utilizzato unicamente a scopo di *pricing*, la conoscenza di tutti i parametri disaggregati non è necessaria, ma è sufficiente la specificazione dei parametri *risk-adjusted*. Dato che questa informazione è comun-

³⁶ La parametrizzazione proposta da Brown e Dybvig (1986) riformula la parametrizzazione aggiusta per il rischio in una forma più adeguata per le procedure di stima.

que contenuta nei prezzi osservati, si possono definire tecniche di stima a partire dai dati di mercato³⁷;

- *partizioni di probabilità risk-neutral (scenari di probabilità)*: i modelli di valutazione dei contratti dipendenti dai tassi di interesse presentano due ordini di problemi se utilizzati a scopi "previsivi". Il primo problema deriva dal fatto che – come ampiamente illustrato – la riparametrizzazione aggiustata per il rischio del modello *CIR* consente, ai soli fini del *pricing*, di ignorare completamente il parametro π espressivo del premio al rischio richiesto dagli investitori e quindi soggettivo e dipendente dalla specifica funzione di utilità degli individui. L'estrazione delle probabilità a scadenza ("*scenari di probabilità*") richiede invece la determinazione in forma esplicita del parametro π , in assenza del quale il modello resta irrisolvibile; la soluzione che viene adottata per la costruzione degli scenari è quella di porre tale parametro uguale a zero e ciò implica da un punto di vista matematico che la funzione caratteristica del mercato q espressa dall'equazione (6) è nulla. Come conseguenza si ha che il *drift* aggiustato per il rischio coincide con il *drift* naturale (equazione 7) e che la misura *risk-neutral* coincide con la probabilità naturale. Tale ipotesi in termini economici è rappresentata dalla "*teoria delle aspettative pure*" (Box 9) i cui limiti sono stati ampiamente illustrati nel paragrafo (3.1). Il secondo problema che limita l'utilizzo di tale modello per l'estrazione delle probabilità a scadenza è più propriamente tecnico e deriva direttamente dalla procedura di calibrazione adottata; il valore dei parametri stimati cambia infatti al variare della data t di osservazione, in evidente disaccordo col fatto che il modello teorico richiede parametri costanti. Questo risultato è una conseguenza dell'estrema semplicità del modello e indica che un approccio univariato al problema della *term structure* non produce prestazioni affidabili a livello previsivo ma fornisce elusivamente un criterio di coerenza tra prezzi definiti nello stesso istante di tempo (*pricing*).

Box 9 – Le ipotesi teoriche sulla struttura per scadenza dei tassi di interesse

In condizioni di perfetta prevedibilità le ipotesi di mercato richiedono che i tassi a pronti coincidano con i tassi *forward* correnti:

$$i(t', s) = i(t, t', s) \quad t \leq t' \leq s.$$

In condizioni di incertezza i tassi futuri $i(t', s)$ sono numeri aleatori nell'istante t , perché in generale sono aleatori in t i prezzi futuri $V(t'; \mathbf{x})$ di qualsiasi flusso \mathbf{x} di pagamenti.

Sebbene i prezzi (e i tassi) futuri siano caratterizzati da un levato livello di imprevedibilità, que-

37 In questo ambito, un procedimento spesso utilizzato è quello cosiddetto di "calibrazione" che consiste nel ricavare il set di parametri *risk-adjusted* che meglio riproducono i prezzi osservati sul mercato a una data t fissata. Nel paragrafo §3.1 sono stati altresì delineati alcuni problemi di instabilità tipici del procedimento di "calibrazione" dei parametri.

ste quantità entrano necessariamente nei piani finanziari che gli agenti formulano al tempo t : acquistano quindi rilevanza le differenti teorie per la struttura per scadenza dei tassi di interesse proposte nella letteratura tradizionale.

1. Ipotesi della pura aspettativa

Si tratta della schematizzazione più semplice, secondo la quale il valore fissato dal mercato per i tassi a termine coincide esattamente col valore che il mercato (nel senso dell'opinione prevalente degli operatori) si aspetta per i tassi a pronti futuri, ovvero:

$$i(t, t', s) = E_t[i(t', s)] \quad t \leq t' \leq s$$

In altri termini i tassi *forward* $i(t, t', s)$ costituiscono un'aspettativa "non distorta" dei futuri tassi a pronti $i(t', s)$.

2. Ipotesi della preferenza per la liquidità

I prezzi di titoli di lunga durata risultano maggiormente sensibili a variazioni della struttura dei tassi rispetto ai titoli di durata più breve. Secondo la teoria proposta da Hicks, per questo motivo gli agenti economici considerano il titolo a lungo termine come investimenti più rischiosi, e essendo avversi al rischio, preferiscono l'acquisto di titoli "più liquidi", cioè con più breve *maturity*.

Ciò implica che sul mercato viene richiesto un compenso, o premio di liquidità, per la detenzione di titoli con scadenza più lunga; in termini di tasso di interesse questo effetto può essere schematizzato assumendo la relazione:

$$i(t, t', s) = E_t[i(t', s)] + p(t, t', s) \quad t \leq t' \leq s$$

dove $p(t, t', s) \geq 0$ rappresenta il tasso di rendimento aggiuntivo corrispondente al premio di liquidità. Secondo questa relazione, il tasso di interesse fissato nell'istante attuale t per un investimento sull'orizzonte $[t', s]$ è uguale al valore atteso del tasso che verrà fissato in t' per lo stesso investimento, più un extrarendimento richiesto come compenso per il rischio derivante dalla "mancata conferma" dell'aspettativa.

3. Ipotesi dei mercati segmentati

Secondo questa teoria i prezzi di titoli con vita a scadenza molto diversa non possono essere rigidamente interconnessi tra loro sulla base del principio di esclusione di arbitraggi, poiché investitori diversi preferiscono, per vari ordini di motivi, detenere titoli appartenenti a un particolare segmento dell'asse delle *maturity*, senza tenere conto dei prezzi degli altri titoli. La forma dell'intera struttura dei tassi risulterà quindi come l'effetto di forza di domanda-offerta che agiscono separatamente sui vari segmenti.

4. Ipotesi dell'habitat preferito

In questo caso si suppone che il mercato sia popolato da agenti che, pur avendo una convenienza a investire su un determinato segmento di *maturity*, sono disposti a uscire da questo "habitat preferito" investendo anche su titoli con vita a scadenza diversa, se questi offrono un adeguato premio in termini di extrarendimento. Con questo approccio si mitiga in pratica l'ipotesi di mercato segmentato e se ne recupera la compatibilità con le ipotesi di mercato ideale.

4 Conclusioni

Il presente lavoro ha passato in rassegna i concetti della moderna matematica finanziaria alla base dei modelli di *pricing* degli strumenti derivati, mettendo in evidenza come l'approccio probabilistico alla base della determinazione del valore teorico dei prodotti finanziari derivati costituisca un potente strumento di valutazione del prezzo di tali prodotti e di conoscenza dei rischi ad essi associati. In particolare, il lavoro ha dimostrato come, sebbene le probabilità neutrali al rischio siano uno strumento adeguato (in termini sia metodologici che interpretativi) per valutare il prezzo "alla data corrente" di un derivato (*fair price*), si rende necessario un affinamento metodologico quando si vogliono inferire le probabilità circa il valore del derivato ad una certa data futura. La ragione di ciò risiede essenzialmente nella circostanza che i modelli di *pricing* di un derivato alla data corrente si basano sull'idea fondamentale del «principio di non arbitraggio», cioè sull'idea che il derivato può essere replicato usando l'attività sottostante e quindi il suo prezzo non dipende dal premio al rischio; ciò consente di utilizzare una modellistica di simulazione dei *pay-off* del derivato dove si assume che il premio al rischio richiesto dagli investitori sia pari a zero, ovvero che gli investitori siano neutrali al rischio. Questa ipotesi – che in termini metodologici consente di risolvere un problema altrimenti insuperabile, ovvero quello di modellare in modo univoco la legge di movimento del prezzo dell'attività sottostante il derivato – non consente, di converso, di ricavare le probabilità circa il valore del derivato ad una certa data futura (cosiddetti "scenari probabilistici"); per stimare queste probabilità, cioè le probabilità "reali", è necessario tenere conto dell'avversione al rischio degli investitori, ossia tenere conto del fatto che gli investitori sono disposti a detenere, ad esempio, titoli azionari solo se da questo investimento si attendono un rendimento superiore al tasso *risk-free*. Ciò vuol dire, in concreto, che, per simulare i *pay-off* ad una data futura di un derivato che ha come sottostante titoli azionari, è necessario usare un modello in cui si assume che i prezzi azionari crescano ad un tasso che include il premio al rischio, e non invece ad un tasso pari al *risk-free* come invece è implicito nelle probabilità *risk-neutral*.

Per quanto riguarda i modelli di *pricing* di strumenti finanziari derivati aventi come sottostanti tassi di interesse (*IRS*) è emerso come – sebbene ai fini del solo *pricing* la conoscenza di tutti i parametri disaggregati non sia necessaria, essendo sufficiente la specificazione dei parametri *risk-neutral* – per l'estrazione delle probabilità a scadenza ("*scenari di probabilità*") è richiesta la determinazione in forma esplicita del parametro di premio al rischio (π), in assenza del quale il modello resta irrisolvibile. La soluzione che viene adottata per la costruzione degli "*scenari*" è quella di porre tale parametro uguale a zero e ciò comporta due implicazioni di non trascurabile rilevanza: la prima, in termini meramente economici, è che si impone l'ipotesi dalla "*teoria delle aspettative pure*", i cui limiti sono stati ampiamente illustrati dalla letteratura empirica; la seconda, più prettamente metodologica, è che il valore dei parametri stimati cambia al variare della data t di osservazione, in evidente disaccordo col fatto che il modello teorico richiede parametri costanti.

In definitiva, affinché gli "*scenari probabilistici*" possano fornire la probabilità "*reale*" di accadimento di un evento futuro e indicazioni circa la probabilità che un investitore ha di conseguire profitti o perdite su uno strumento finanziario derivato dovrebbero tenere conto del premio per il rischio. Senza tale correzione, l'impiego di tali "*scenari*" quale strumento informativo a tutela dell'investitore *retail* potrebbe quindi fornire indicazioni di difficile interpretazione, in quanto più che rappresentare vere previsioni indicano esclusivamente la distribuzione degli scenari di prezzo futuri che sono compatibili («matematicamente coerenti») con i prezzi e la volatilità del sottostante che si osservano al tempo corrente.

Al fine di ottenere una misura di probabilità «corretta» occorrerebbe integrare la procedura di stima che è stata descritta in questo lavoro con una misura di avversione al rischio degli investitori (cioè una misura di «premio al rischio»); tuttavia, l'utilizzo di probabilità *real world*, cioè corrette per il premio al rischio, impone un affinamento metodologico volto a consentirne l'impiego nella regolamentazione sulla trasparenza dei prodotti finanziari. Un'ipotesi di premio al rischio che variasse a seconda del singolo investitore e della sua particolare funzione di utilità presenterebbe tuttavia caratteri di più o meno accentuata soggettività.

Bibliografia

- E. Altman (1989), *Measuring Corporate Bond Mortality and Performance*, Journal of Finance.
- Ang, A. and Chen, J. S. (2003), *CAPM Over the Long-Run: 1926-2001*, mimeo.
- Baxter, M. e Rennie, A., (1996), *Financial Calculus. An Introduction to Derivatives Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Black, F. e Scholes, M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, "Journal of Political Economy", n. 81, pp. 637-659.
- Bliss R. e Panigirtzoglou, N. (2004), *Option implied risk-aversion estimates*, "Journal of Finance", vol.59.
- Boyle, P.P., (1977), *Options: a Monte Carlo approach*, "Journal of Financial Economics", n. 4.
- Boyle, P.P., Broadie, M., Glasserman, P., (1997), *Monte Carlo methods for security pricing*, "Journal of Economic Dynamics and Control", n. 21.
- Brandt, M., e Chapman D., (2002), *Comparing Multifactor Models of the Term Structure*, DP Wharton School.
- Brown, S.J., e Dybvig, P.H., (1986), *The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of interest rates*, "Journal of Finance", 41, 3.
- Campbell, J. Y. e R. J. Shiller (1991), *Yield spreads and interest rate movements: a bird's eye view*, Review of Economic Studies.
- Campbell J. Y. e Vuolteenaho T. (2004), *Bad Beta, Good Beta*, American Economic Review.
- Castellani G., De Felice M., Moriconi F. (2005), *Manuale di finanza* (3 voll.), Il Mulino.
- Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Mottura C. (1993), *Un corso sul controllo del rischio di tasso d'interesse*, Il Mulino.
- Cheng Yong Tang e Song Xi Chen, (2009), *Parameter estimation and bias correction for diffusion processes*, Journal of Econometrics, n. 149, pp. 65-81.
- Cochrane J. H. e M. Piazzesi (2005), *Bond Risk Premia*, American Economic Review.
- Cochrane J. (2011), *Presidential Address: Discount Rates*, Journal of Finance.

- Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein, M., (1979), *Option pricing: a simplified approach*, "Journal of financial Economics", n.7, pp. 229-263.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, "Econometrica", n. 53, pp. 385-407.
- Dimson E., P. Marsh and M. Staunton (2003), *Global Evidence on the Equity Risk Premium*, *Journal of Applied Corporate Finance*, Vol. 15, No. 4, Summer 2003
- Duffie, D. e Singleton, K.J., (1999), *Modelling term structures of defaultable bonds*, "Review of Financial Studies", n. 12, 687-720.
- Fama E. e R. Bliss (1987), *The information in long-maturity forward rates*, *American Economic Review*.
- Fama, E. F. e French K. R. (2002), *The Equity Premium*, *Journal of Finance*.
- Fama, E. F. e French K. R. (2003), *The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence*, CRSP Working Paper No. 550.
- Fama, E. F. e French K. R. (2006), *The Value Premium and the CAPM*, *Journal of Finance*.
- Gisiger, N., (2010), *Risk-neutral Probabilities Explained*, working paper.
- Gourieroux, C., e Monfort, A., (2007), *Estimation of the Historical Mean-Reverting Parameter in the Cir Model*, mimeo.
- Grundy, B. D. (1991), *Option prices and the underlying asset's return distribution*, "Journal of Finance", vol. 46(3), pp. 1045-1069.
- Hammersley, J.M., Handscomb, D.C. (1964), *Monte Carlo methods*, London, Methuen.
- Harrison, J. M. e D. M. Kreps (1979), *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, in "Journal of Economic Theory", n. 20, pp. 381-408.
- Harrison, J. M. e Pliska, R., (1981), *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, "Stochastic Processes", n. 11, 215-260.
- Hou K., Karolyi G. A. e B. Kho (2011), *What Factors Drive Global Stock Returns?*, *Review of Financial Studies*.
- Hull, J.C., (2000), *Opzioni futures e altri derivati*, Prentice-Hall International.
- Humphreys V. e Noss, J., (2012), *Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density functions*, "Bank of England working paper", n. 455.
- Jarrow, R.A., Lando, D. (2005), *Default risk and diversification: theory and empirical implications*, "Mathematical Finance", vol. 15, 1-26.
- Yu, F., (2002), *Modelling expected return on defaultable bonds*, "Journal of Fixed Income", n. 12, 69-81.

Liu, X., Shackleton, M., Taylor, S. e Xu, X. (2007), *Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions*, "Journal of Banking and Finance", vol.31, pp 1501-1520.

Shreve, E.S., (2004), *Stochastic Calculus for Finance*, Springer.

Siciliano, G. (2001), *Cento anni di borsa in Italia. Mercato, imprese e rendimenti azionari nel ventesimo secolo*, Bologna, Il Mulino.

J. Siegel (1994), *Stocks for the Long Run*, Irwin Professional Publishing.

L'approccio della regolamentazione europea in materia di informativa sui rischi dei prodotti finanziari

Il tema della misurazione dei rischi dei prodotti e strumenti finanziari è un elemento centrale in tutta la regolamentazione sull'intermediazione finanziaria, sia per ciò che riguarda i profili di stabilità e sana e prudente gestione sia per quanto riguarda i profili di trasparenza e correttezza nei rapporti fra intermediari e investitori.

Per ciò che riguarda il primo profilo, la regolamentazione vigente in Europa in materia di misurazione della rischiosità degli attivi bancari e di requisiti patrimoniali (Direttiva 76/2010/CE, c.d. *Capital Requirements Directive*) fa ampio riferimento all'utilizzo di modelli quantitativi simili a quelli illustrati nel precedente paragrafo, in particolare per ciò che riguarda la misurazione del rischi di mercato e di credito derivante dalle esposizioni in titoli e derivati. Tuttavia, le suddette disposizioni non fanno riferimento ad uno specifico modello quantitativo, rimettendo alla discrezionalità del singolo intermediario la definizione della specifica architettura del modello da adottare (c.d. modelli interni) in grado di incorporare la complessità dei profili di rischio caratterizzanti la realtà organizzativa in cui lo stesso opera. In tale ambito l'Autorità di vigilanza è chiamata a validare preventivamente il modello in termini di tenuta complessiva dello stesso e non di risultati di volta in volta prodotti.

Per ciò che riguarda invece il secondo profilo, la normativa comunitaria in materia di *securities regulation* e di trasparenza sui prodotti finanziari adotta un approccio diverso. Ad esempio, la disciplina comunitaria in materia di fondi comuni (direttiva 2009/65/CE) adotta un approccio di misurazione della rischiosità dei prodotti basato sulla misurazione della volatilità storica. La disciplina in materia di prospetti informativi (Direttiva 2010/73/UE) ha adottato invece un approccio sostanzialmente narrativo nell'illustrazione dei rischi.

Inoltre, sia la direttiva in materia di prospetti che quella in materia di fondi comuni (come verrà meglio discusso nei par. successivi) sono discipline cosiddette di armonizzazione massima, e cioè non consentono agli Stati membri la possibilità di chiedere l'inserimento nella documentazione d'offerta di informazioni aggiuntive rispetto a quelle previste dalla disciplina stessa. Infatti, lo stesso considerando 30 della direttiva prospetto chiarisce che la finalità della massima armonizzazione dovranno realizzarsi anche attraverso l'eliminazione delle disparità in termini di efficienza, modalità e durata del controllo dell'informazione fornita in un prospetto, conseguendosi

in tal modo un «*adeguato livello di equivalenza nelle misure di tutela richieste in ciascuno Stato membro*».

Inoltre, si deve tenere presente che, per effetto della disciplina sulla prestazione dei servizi di investimento (Direttiva 2004/39/CE, c.d. MiFID), l'investitore *retail* che sottoscrive uno strumento finanziario è normalmente assistito da un intermediario che è tenuto al rispetto di rigorose regole di condotta in materia di trasparenza e correttezza dei comportamenti e a obblighi di valutazione dell'adeguatezza del prodotto rispetto al profilo del cliente per ciò che riguarda la sua avversione al rischio e il suo l'orizzonte temporale di investimento. Tali obblighi sussistono anche quando vi è coincidenza fattuale fra emittente e distributore (come nel caso della banca che distribuisce strumenti finanziari di propria emissione).

La disciplina comunitaria prevede dunque che l'analisi del profilo di rischio dei prodotti consigliati e la connessa predisposizione di procedure per la valutazione dell'adeguatezza delle operazioni rientrano nei compiti specifici degli intermediari, mentre all'organo di vigilanza spetta la verifica della conformità delle medesime procedure ai principi dettati dalla normativa e della loro concreta applicazione nell'interazione con il cliente. In proposito, si rileva come in un recente documento in materia di prodotti strutturati, l'autorità di vigilanza inglese sui mercati finanziari, la FCA (*Financial Conduct Authority*), chiarisca come la determinazione delle modalità di ingegnerizzazione e di distribuzione dei prodotti, anche strutturati, siano responsabilità esclusiva dell'intermediario, che deve dotarsi di procedure idonee ad assicurarne la coerenza con il profilo della clientela *target*¹.

La Direttiva UCITS IV e la proposta sui PRIIPs

La disciplina comunitaria cosiddetta "UCITS IV" (direttiva 2009/65/CE) in materia di fondi comuni di investimento ha adottato un approccio di massima armonizzazione del contenuto della documentazione d'offerta per gli investitori *retail* prevedendo nel Regolamento comunitario 583/2010 (le cui disposizioni sono direttamente applicabili negli ordinamenti nazionali) schemi vincolanti in materia di contenuti del documento informativo sintetico contenente le informazioni chiave per gli investitori (cosiddetto *key investor information document*, c.d. KIID) basati su metodologie di natura quantitativa ma diverse da quelle discusse nel precedente paragrafo.

In particolare, le linee guida adottate dal CESR (ora ESMA) in attuazione del Regolamento 583/2010 hanno specificato gli aspetti metodologici da seguire nella predisposizione dell'informativa veicolata attraverso il KIID, usando un approccio

1 La *Financial Services Authority* (FSA), ora FCA, ha pubblicato un documento nel marzo 2012 contenente linee guida relative alla creazione e distribuzione di prodotti strutturati contenenti regole volte ad assicurare che il "*product manufacturer*" e il distributore del prodotto siano in grado di valutare e misurare i rischi del prodotto che intendono immettere sul mercato (FSA, *Finalised Guidance, Retail Product Development and Governance – Structured Product Review*, March 2012).

quantitativo diverso da quello basato sugli "scenari di probabilità"². Tali linee guida prevedono infatti che la metodologia del calcolo degli indicatori sintetici di rischio di cui all'articolo 8 e all'Annex I del Regolamento di implementazione del KIID si basino sulla computazione della volatilità storica dei rendimenti del fondo su un periodo campionario di almeno 5 anni; tale volatilità è poi rappresentata su una scala numerica di rischio che va da 1 (rischio basso) a 7 (rischio alto).

Tale regolamentazione è stata adottata dopo diverse consultazioni condotte dal CESR (le risposte a tali consultazioni sono disponibili sul sito della Commissione Europea)³ e ha tenuto conto delle evidenze di un esercizio di *consumer testing* commissionato dalla Commissione Europea ad una società specializzata sulla percezione/reazione degli investitori ai diversi modelli di KIID. Al riguardo (e ciò fu parte delle valutazioni effettuate prima di assumere la decisione definitiva su quale approccio utilizzare) è emerso che gli investitori *retail* percepiscono indicazioni di natura probabilistica come effettive e stabili, mentre invece i risultati (e quindi le possibilità di guadagnare o perdere) sono soggetti a continui mutamenti nel tempo secondo la variazione dei parametri sottostanti presi a riferimento nella modellistica impiegata⁴.

Nella direzione di una completa standardizzazione della documentazione di offerta, si indirizza pure la proposta di regolamento sui PRIPs della Commissione europea del 3 luglio 2012. In particolare, tale proposta prevede che continui l'interazione tra informazione minima sul prodotto e regole di comportamento dell'intermediario nel momento in cui il prodotto viene offerto ad un cliente *retail*. Per quanto riguarda gli strumenti finanziari, le regole sono quelle previste dalla MiFID, mentre per quanto attiene ai prodotti assicurativi saranno quelle contenute nell'*insurance mediation directive* (2002/92/EC). La proposta non prevede, allo stato, alcuna forma di controllo preventiva e/o di approvazione del prodotto o del *key information document* (KID) né alcuna possibilità di chiedere informazioni o di ricevere *ex post* i KID. Si prevede soltanto che le Autorità possano interrompere la commercializzazione del prodotto e imporre sanzioni.

Infine, la proposta di Regolamento PRIPs del luglio 2012 prevede l'inserimento nel KID di "*performance scenarios*" solo ove rilevanti avuto riguardo alla natura del prodotto. In ogni caso, non viene specificato se tali scenari debbano essere di tipo deterministico (in analogia con l'approccio seguito per il caso degli UCITS strutturati nelle *Guidelines* CESR/10-1318) ovvero probabilistici, né è fornito alcun tipo di dettaglio in proposito. Spetterà infatti alla Commissione Europea, mediante l'adozione di appositi atti delegati, la specificazione degli elementi informativi prescritti nel KID dei PRIPs.

Ulteriori vincoli discendono dalla Direttiva MiFID per ciò che concerne la prestazione dei servizi di investimento. Quest'ultima infatti prevede che l'inter-

2 "CESR's guidelines on the methodology for the calculation of the synthetic risk and reward indicator in the Key Investor Information Document", CESR/10-673, July 2010.

3 Consultation paper - Guidelines on the selection and presentation of performance scenarios in the Key Investor Information Document for structured UCITS.

4 UCITS Disclosure Testing Research Report.

mediario fornisca all'investitore un'informativa concernente il «*tipo specifico di strumenti finanziari [...] proposti*» (cfr. art. 19, par. 3, della Direttiva 2004/39/CE e art. 31, parr. 1 e 2, della direttiva 2006/73/CE).

Si segnala, da ultimo, che l'Autorità portoghese ha di recente emanato, con Regolamento 2/2012, una specifica disciplina in materia di obblighi informativi concernenti i "prodotti finanziari complessi" i cui dettagli sono discussi nel Box 7. Si può senz'altro osservare che il KID previsto dall'Autorità portoghese (che deve essere consegnato dal soggetto che procede alla commercializzazione all'investitore *retail*) contiene un'informativa che ha ad oggetto uno strumento finanziario ben preciso e non un "*tipo specifico*" di strumento: in tal senso, la previsione di un KID sembrerebbe costituire un obbligo aggiuntivo rispetto a quelli previsti dalla MiFID⁵.

Nel contesto normativo italiano non vi è una disposizione di contenuto analogo. Al contrario, è stato stabilito un generale divieto di introdurre o mantenere obblighi aggiuntivi rispetto al quadro comunitario di riferimento (c.d. divieto di *goldplating*), in sede di recepimento della normativa comunitaria (art. 15 della legge n. 183/2011).

La direttiva prospetto

La normativa comunitaria in materia di prospetti (Direttiva 2010/73/UE e Regolamenti attuativi) è, come anticipato, una disciplina di armonizzazione massima che non lascia spazio ad interventi integrativi della disciplina armonizzata da parte degli Stati membri, restando esclusa ogni possibilità per le Autorità di vigilanza nazionali di esigere in via generale ed astratta l'inserimento nel prospetto di elementi informativi non previsti dagli «schemi» comunitari⁶.

In tal senso opera, nell'ordinamento italiano, anche il c.d. divieto generale di *goldplating* stabilito dall'art. 24-*bis* della legge n. 246/2005 (introdotto dalla legge n. 183/2011), che vincola – sia a livello di legislazione primaria che di regolamentazione secondaria – l'attività di recepimento della disciplina comunitaria. Va tuttavia chiarito che, sulla scorta della disciplina comunitaria di settore, non modificata sul punto, è possibile per l'Autorità competente chiedere, all'atto di approvazione di un prospetto, caso per caso, «*che le informazioni fornite [...] vengano completate per ognuno degli elementi informativi richiesti*», sempre che ciò si renda necessario nell'ambito della singola istruttoria per la corretta comprensione delle informazioni già richieste e fornite (cfr. art 3 e art. 22, par. 3 del Regolamento comunitario 809/2004, nonché art. 21, par. 3, lett. a, della Direttiva Prospetto).

5 Al riguardo si rammenta che, secondo quanto previsto dall'art. 4, par.1, della Direttiva 2004/39/CE (recepito nell'ordinamento italiano all'art. 6, comma2, del TUF), «gli Stati membri possono mantenere o imporre obblighi aggiuntivi a quelli previsti nella presente direttiva solo nei casi eccezionali in cui tali obblighi siano obiettivamente giustificati e proporzionati, vista la necessità di far fronte a rischi specifici per la protezione degli investitori o l'integrità del mercato che non siano adeguatamente trattati dalla presente direttiva [...]». Il par. 3 della norma citata soggiunge poi che «gli Stati membri notificano alla Commissione [...] gli eventuali obblighi che intendono imporre in applicazione del paragrafo 1 almeno un mese prima della data prevista per l'entrata in vigore di tali obblighi».

6 Le finalità dell'armonizzazione della disciplina possono rinvenirsi, tra l'altro, nel Considerando n.30 della Direttiva Prospetto.

Regolamento n. 2/2012 adottato dall'Autorità di Vigilanza portoghese (CMVM) in materia di prodotti finanziari complessi

Con regolamento n. 2/2012, adottato in data 25 ottobre 2012, l'Autorità di vigilanza portoghese sui mercati finanziari (CMVM) ha dettato una disciplina specifica in materia di obblighi informativi concernenti i "prodotti finanziari complessi". Tale Regolamento è stato emanato in forza di una specifica disposizione contenuta nel Decreto Legge n. 211-A/2008 e va a sostituire il Regolamento n. 1/2009, già adottato dalla medesima CMVM sulla base del Decreto Legge citato.

Il Decreto Legge n. 211-a/2008, che ha la finalità dichiarata di «aumentare la stabilità finanziaria» (art. 1), pone una particolare enfasi sulla *disclosure* concernente i "prodotti finanziari complessi", intesi come quei prodotti il cui rendimento dipende in tutto o in parte dall'andamento di un sottostante, ivi inclusi i depositi strutturati. In tale ambito viene espressamente conferito all'Autorità di vigilanza il potere di disciplinare i requisiti di *disclosure* relativi ai prodotti finanziari complessi, al fine di consentire agli investitori di ottenere una conoscenza effettiva delle caratteristiche e dei rischi dei medesimi.

In attuazione dei poteri sopra menzionati, il Regolamento n. 2/2012 introduce, per tutti i prodotti finanziari complessi, un documento denominato "*Key Investor Information*" (KIID), di cui disciplina il *format* e i contenuti. Il Regolamento prevede, quindi, la consegna all'investitore *retail* del KIID, che tuttavia non è soggetto all'approvazione dell'Autorità di vigilanza: tale documento risulta essere aggiuntivo rispetto all'eventuale documentazione d'offerta già esistente, secondo l'approccio già seguito in ambito UCITS e in coerenza con i lavori in corso in ambito PRIIPs.

Responsabile della consegna o messa a disposizione del KIID è la "*market entity*": pur non essendo prevista una definizione al riguardo, da una lettura sistematica del provvedimento essa pare potersi identificare con l'intermediario che presta un servizio di investimento.

L'art. 13 del citato Regolamento prevede che il KIID dei prodotti per i quali il pagamento degli interessi o l'ammontare degli stessi, la data di rimborso del capitale o l'ammontare del rimborso stesso sono connessi al verificarsi di un evento dovrebbe descrivere lo scenario peggiore e quello migliore. Laddove, se base volontaria, o quando richiesto della CMVM, il KIID presenta scenari od esempi, l'art. 13 prevede la presentazione di tre scenari di rendimento, definiti sulla base di distribuzioni di probabilità dei rendimenti attesi.

Tuttavia, gli scenari introdotti dall'Autorità portoghese forniscono esclusivamente un valore del rendimento (più o meno probabile) e non un livello di probabilità corrispondente al verificarsi di un dato evento; inoltre, nella disciplina portoghese, non è previsto il confronto con il rendimento dell'attività priva di rischio e soprattutto non è imposta l'ipotesi di neutralità al rischio.

In conclusione, pur adottando un approccio che privilegia aspetti di tipo qualitativo, il KIID contempla l'inserimento su base volontaria di scenari di rendimento basati su approccio di tipo probabilistico, senza per altro che via sia alcuna indicazione vincolante circa l'uso delle probabilità *risk-neutral*.

Ciò significa che (soltanto) sulla scorta di una specifica valutazione (in base a "motivi ragionevoli") caso per caso, l'Autorità di vigilanza potrà chiedere l'inserimento, nel prospetto oggetto di istruttoria, di informazioni "supplementari" (arg. ex art. 13, par. 4, Direttiva Prospetto) che si rendano necessarie per completare ovvero rendere comprensibile, nel singolo caso, ciascun elemento informativo previsto dagli schemi di prospetto. Tale potere incontra, tuttavia, un limite (intrinseco) nell'impossibilità di modificare il modello di schema di prospetto (basato su una rigida elencazione di argomenti suddivisi in paragrafi) stabilito dal Regolamento comunitario di attuazione della direttiva (cfr. art. 3 del Regolamento 809/2004 come modificato dal Regolamento 486/2012, secondo cui "Il prospetto è redatto utilizzando uno degli schemi e dei moduli o una delle loro combinazioni di cui al presente regolamento"), Regolamento direttamente applicabile nell'ordinamento di tutti gli Stati membri.

Il Regolamento comunitario 486/2012, tuttavia, ha specificato quali sono gli elementi informativi che devono essere inclusi nel prospetto di base o nelle condizioni definitive (compresa la nota di sintesi: cfr. art. 24), attraverso il rinvio a tre categorie di riferimento (A, B e C)⁷ ed ha, dunque, fissato in dettaglio il contenuto *standard* obbligatorio delle condizioni definitive (riferite alle specifiche emissioni) e, dunque, implicitamente, anche del prospetto di base, prevedendo altresì un elenco di informazioni "supplementari" – non rientranti nel contenuto necessario della nota informativa sugli strumenti finanziari – che possono essere inserite, su base volontaria, nelle stesse condizioni definitive, se ritenute utili per gli investitori.

Ne risulta, nell'insieme, un quadro prescrittivo, relativo al contenuto della documentazione di offerta, rigoroso e stringente. In questo ristretto ambito è possibile che l'Autorità di vigilanza, caso per caso, richieda all'emittente e/o all'offerente l'inserimento nel prospetto di base di informazioni descrittive che consentano di completare o rendere comprensibili le informazioni già rese in ottemperanza al dettato regolamentare. Ciò, come già detto in generale, nei limiti della coerenza dell'integrazione richiesta rispetto all'*item* previsto dal paragrafo incluso nello schema di prospetto (in altri termini, le integrazioni richieste non devono modificare né snaturare il contenuto informativo del paragrafo integrato, né comportare l'inserimento di parti o paragrafi aggiuntivi).

In relazione alle condizioni definitive (soggette ad un controllo solo *ex post* da parte dell'Autorità di vigilanza), invece, l'Allegato XXI al Regolamento 486/2012, prevede espressamente la possibilità per l'emittente e/o offerente – solo su base volontaria, trattandosi di documentazione non soggetta ad approvazione – di inserire un "numero chiuso" di informazioni "supplementari" rispetto allo schema.

7 Ciascun elemento informativo contenuto negli schemi di prospetto è stato classificato in tre categorie, le quali determinano il grado di flessibilità con cui le informazioni possono essere fornite nel prospetto di base o nelle condizioni definitive. In particolare, le informazioni di categoria A dovranno essere necessariamente inserite nel prospetto di base; le informazioni di categoria B verranno incluse nel prospetto di base solo per principi generali, mentre i dati che siano ignoti al momento dell'approvazione del prospetto di base potranno essere lasciati in bianco e inseriti nelle condizioni definitive; le informazioni di categoria C dovranno essere veicolate con le condizioni definitive qualora non siano note al momento dell'approvazione del prospetto di base.

Si evidenzia che, tra le "informazioni supplementari", sono menzionate anche eventuali esemplificazioni che l'emittente potrà utilizzare per illustrare la natura di taluni strumenti derivati complessi, allo scopo di fornire agli investitori spiegazioni chiare ed esaurienti che consentano loro di capire in che modo il valore dell'investimento è influenzato dal valore del sottostante.

L'approccio normativo connotante il descritto regolamento, dunque, non rende possibile introdurre nei prospetti e nelle condizioni definitive, neppure su base volontaria, informazioni non ricomprese tra quelle previste come obbligatorie o come supplementari, né allocare un'informazione in un documento diverso rispetto a quanto normativamente previsto per la categoria (A, B o C) cui tale informazione deve ricondursi.

Da ultimo, non può non rilevarsi come si debba tener in ogni caso presente che la *ratio* della Direttiva prospetto e del Regolamento di attuazione è quella di massima armonizzazione delle regole circa le informazioni da inserire nella documentazione d'offerta a tutela degli investitori, ridurre gli oneri amministrativi per gli emittenti e aumentare l'efficienza del regime del prospetto (cfr. considerando n.4 del Reg. 486/2012), nell'ottica di una più agevole comparabilità da parte degli investitori degli strumenti finanziari offerti (cfr. Considerando n. 10 del medesimo Regolamento sulla nota di sintesi).

Recenti pubblicazioni

- 74** – agosto 2013
Quaderni di finanza Probabilità reali e probabilità neutrali al rischio nella stima del valore futuro degli strumenti derivati
L. Giordano, G. Siciliano
- 3** – aprile 2013
Quaderni giuridici Le linee di azione della Commissione europea in materia di *corporate governance* e i riflessi sull'ordinamento italiano
S. Alvaro, B. Lupini
- 2** – febbraio 2013
Quaderni giuridici L'autodisciplina in materia di *corporate governance*. Un'analisi dell'esperienza italiana
S. Alvaro, P. Ciccaglioni, G. Siciliano
- 73** – gennaio 2013
Quaderni di finanza The impact of financial analyst reports on small caps prices in Italy
C. Guagliano, N. Linciano, C. Magistro Contento
- 72** – dicembre 2012
Quaderni di finanza Financial contagion during Lehman default and sovereign debt crisis. An empirical analysis on Euro area bond and equity markets
M. Gentile, L. Giordano
- 5** – dicembre 2012
Discussion papers Il *trading* ad alta frequenza. Caratteristiche, effetti e questioni di *policy*
S. Alvaro, V. Caivano, S. Ciccarelli, G. Di Stefano, M. Fratini, M. Giliberti, N. Linciano, I. Tarola
- 1** – novembre 2012
Quaderni giuridici Il voto di lista per la rappresentanza di azionisti di minoranza nell'organo di amministrazione delle società quotate
S. Alvaro, G. Mollo, G. Siciliano
- 71** – ottobre 2012
Quaderni di finanza The determinants of government yield spreads in the euro area
L. Giordano, N. Linciano, P. Soccorso
- 4** – luglio 2012
Discussion papers La rilevazione della tolleranza al rischio degli investitori attraverso il questionario
N. Linciano, P. Soccorso

- 3** – luglio 2012
Discussion papers
I Fondi Sovrani e la regolazione degli investimenti nei settori strategici
S. Alvaro, P. Ciccaglioni
- 2** – dicembre 2011
Discussion papers
L'overpricing dei covered warrant: evidenze per il mercato italiano
E. Ciccone, L. Giordano, R. Grasso
- 70** – ottobre 2011
Quaderni di finanza
Women on boards in Italy
M. Bianco, A. Ciavarella, R. Signoretti
- 69** – luglio 2011
Quaderni di finanza
L'impatto della frammentazione degli scambi azionari sui mercati regolamentati europei
S.F. Fioravanti, M. Gentile
- 68** – maggio 2011
Quaderni di finanza
La finanza comportamentale e le scelte di investimento dei risparmiatori. Le implicazioni per gli intermediari e le Autorità
Atti del Convegno Consob-LUISS, Roma 4 giugno 2010
- 1** – febbraio 2011
Discussion papers
I credit default swap. Le caratteristiche dei contratti e le interrelazioni con il mercato obbligazionario
L. Amadei, S. Di Rocco, M. Gentile, R. Grasso, G. Siciliano
- 67** – luglio 2010
Quaderni di finanza
Le obbligazioni emesse da banche italiane. Le caratteristiche dei titoli e i rendimenti per gli investitori
R. Grasso, N. Linciano, L. Pierantoni, G. Siciliano
- 4** – aprile 2010
Position papers
Aumenti di capitale con rilevante effetto diluitivo
- 66** – gennaio 2010
Quaderni di finanza
Errori cognitivi e instabilità delle preferenze nelle scelte di investimento dei risparmiatori retail. Le indicazioni di policy della finanza comportamentale
N. Linciano
- 65** – dicembre 2009
Quaderni di finanza
Il rapporto tra le Sgr e gli "esperti indipendenti" nella fase di valutazione degli asset dei fondi immobiliari
- 3** – ottobre 2009
Position papers
Gestione accentrata in regime di dematerializzazione delle quote dei fondi aperti
Gruppo di lavoro Consob-Banca d'Italia